FK Ex 4 - Musterlösung Probeklausur

1 Quickies

(a) Was ist Licht?

(b) Welche verschiedenen Arten von Polarisationen gibt es?

(c) Durch welche Effekte kann man aus unpolarisiertem Licht polarisiertes Licht erzeugen?

(d) Geben Sie die Wellenfunktion einer beliebigen harmonischen Welle an und erläutern Sie die Begriffe Dispersionsrelation, Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit und das Huygensche Prinzip.

(e) Sonnenlicht ist nicht blau oder rot. Trotzdem sehen wir einen blauen Himmel und einen roten Sonnenuntergang. Erklären Sie diese Phänomene.

Lösung

(a) Elektromagnetische Welle.

(b) Linear, zirkular und elliptisch polarisiertes Licht.

(c) Absorption, Streuung, Reflexion und Doppelbrechung.

(d) **Wellenfunktion**:

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \tag{1}$$

Die **Dispersionsrelation** beschreibt die Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω von der Wellenzahl k, also $\omega = \omega(k)$. Die **Gruppengeschwindigkeit** spielt in dispergierenden Medien eine Rolle. Hier bewegen sich Wellen mit unterschiedlicher Frequenz mit unterschiedlicher Geschwindigkeit fort. Wenn man mehrere Wellen zu einem Wellenpaket zusammenfasst, gibt es eine einhüllende Modulationskurve, die sich mit der Gruppengeschwindigkeit fortbewegt. Die **Phasengeschwindigkeit** ist dann die Geschwindigkeit der Trägerwelle. Das **Huygensche Prinzip** besagt, dass in einer Wellenfront jeder Punkt der Welle Ausgangspunkt einer Elementarwelle ist. Überlagerung dieser Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

(e) Die Atmosphäre besteht aus Stickstoff und Sauerstoff. Das weiße Licht der Sonne lässt diese Moleküle oszillieren, die dann ihrerseits wieder Strahlung mit derselben Frequenz abgeben. Das heißt, das weiße Licht der Sonne wird gestreut. Blaues Licht hat eine deutlich kleinere mittlere freie Weglänge (etwa 50 km) als rotes Licht (etwa 180 km), d. h. es wird bedeutend stärker gestreut und man sieht den blauen Himmel. Das rote Licht des Sonnenuntergangs sieht man, weil man viel direkter in die Sonne schauen kann. Der blaue Anteil der Sonne wird weggestreut und der rote Anteil bleibt.

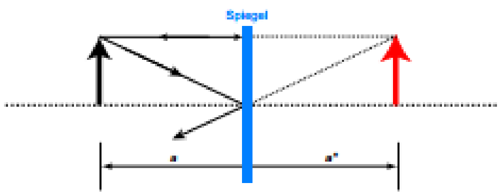
2 Ebener Spiegel

Vor einem ebenen Spiegel befindet sich im Abstand a ein Gegenstand der Größe y.

(a) Führen Sie die Bildkonstruktion durch. Entsteht ein virtuelles Bild?

(b) Ermitteln Sie die Bildweite a^* mit Hilfe der Abbildungsgleichung.

Lösung



(a) Es entsteht ein virtuelles Bild.

(b) Abbildungsgleichung ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^*} \tag{2}$$

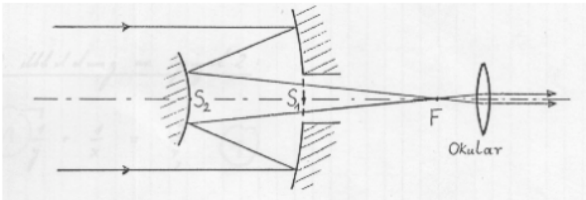
Ein ebener Spiegel besitzt einen unendlichen Krümmungsradius. Damit gilt $f = \infty$. Es folgt daraus:

$$a^* = -a \tag{3}$$

3 Teleskop

Ein Teleskop zur Betrachtung weit entfernter Sterne besteht aus zwei sphärischen Spiegeln (Skizze). Der Krümmungsradius des großen Spiegels (mit einem Loch im

Zentrum) sei 2 m, derjenige des kleinen betrage 0.6 m. Der Abstand der Scheitel S_1, S_2 der beiden Spiegel ist 0.75 m.



(a) Berechnen Sie den Abstand des bildseitigen Brennpunkts F des Spiegelsystems vom Scheitel S_2 des kleinen Spiegels (parallel einfallende Strahlen, siehe Skizze).

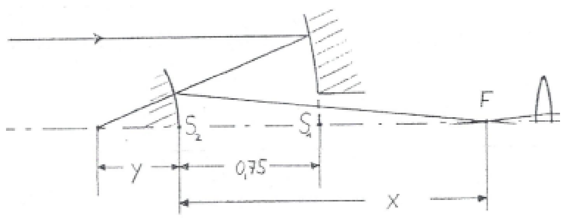
(b) Bestimmen Sie die effektive Brennweite der Anordnung beider Spiegel (effektive Brennweite = Brennweite einer Sammellinse mit gleichen abbildenden Eigenschaften wie das Spiegelsystem).

(c) Mit Hilfe eines Okulars $f_{\mathrm{Ok}} = 2$ cm wird nun das reelle Zwischenbild des Sterns mit entspanntem Auge betrachtet. Berechnen Sie die Vergrößerung des Gesamtsystems.

(d) Was sind die Hauptvorteile von Spiegelteleskopen gegenüber astronomischen Fernrohren (Linsenteleskopen)?

Lösung

(a) Mit den Beziehungen aus der Skizze folgt aus der Abbildungsgleichung:



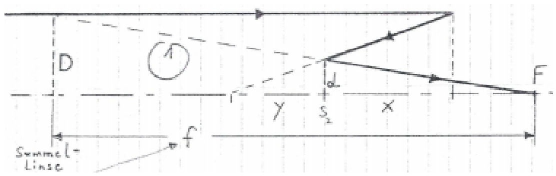
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{4}$$

Set $g = \infty$ und $f = \frac{r}{2}$ dann erhält man $\frac{1}{b} = \frac{2}{r_1}$. Außerdem gilt $b = y + 0.75$ m. Daraus folgt $y = \frac{r_1}{2} - 0.75 \text{ m} = 0.25$ m. Der Bildpunkt wird nun vom zweiten

Spiegel in den Brennpunkt fokussiert, wobei nun auf die negativen Vorzeichen von y und r_2 geachtet werden muss:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2}{r_2} \quad \Rightarrow x = \frac{y r_2}{2y - r_2} = 1.5 \text{ m} \tag{5}$$

(b) Wir konstruieren den Standort der Linse wie der Zeichnung angedeutet und berechnen aus zwei Strahlensätzen:



$$\frac{d}{D} = \frac{x}{f} \tag{6}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{|y|}{|y| + 0.75 \text{ m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{(|y| + 0.75 \text{ m})x}{|y|} = 6 \text{ m} \tag{7}$$

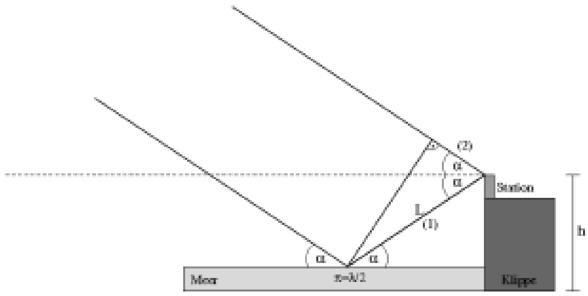
(c)

$$v = \frac{f}{f_{\text{Ok}}} = 300 \tag{8}$$

(d) Es gibt zum einen keine chromatische Aberration (eine größere Bandbreite $\Delta\lambda$ wird übertragen) und zum anderen sind Spiegel in größeren Durchmessern konstruierbar und justierbar, was eine höhere Lichtausbeute zur Folge hat.

4 Interferenz

Eine Radarstation beobachtet den Venusaufgang. Die Station steht auf einer Klippe am Ufer des Atlantiks und sendet zu diesem Zweck elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge von $\lambda = 300$ m aus. Die Höhe der Station gegenüber Meereshöhe beträgt $h = 350$ m. Die Intensität der von der Venus reflektierten Radarsignale hat ein erstes Minimum wenn die Venus den Winkel α über dem Horizont erreicht. Berechnen Sie diesen Winkel α. (**Hinweis:** Das meer ist als plane, perfekt reflektierende Fläche zu betrachten. Beugungseffekte, der Einfluss der Atmosphäre und die Erdkrümmung sollen vernachlässigt werden. Außerdem ist die Venus ziemlich weit weg!)



Lösung

Man muss den Gangunterschied Δs berechnen, der durch die unterschiedlichen Weglängen (1) und (2) erzeugt wird ist.

$$(1) = L = \frac{h}{\sin \alpha} \tag{9}$$

$$(2) = L = L \cdot \cos(2\alpha) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \Delta s = (1) - (2) = L - L \cdot \cos 2\alpha = \frac{h}{\sin \alpha}(1 - \cos(2\alpha)) = 2h \sin \alpha \tag{11}$$

Unter Berücksichtigung des Phasensprungs bei der Reflexion an der Grenzfläche Luft-Wasser, ergibt sich somit für den Wegunterschied die Minimalbedingung 1. Ordnung zu

$$\Delta s = 2h \sin \alpha = \lambda \tag{12}$$

Auflösen nach dem Winkel α liefert das gesuchte Ergebnis:

$$\alpha = \arcsin \frac{\lambda}{2h} = 25.4^\circ \tag{13}$$

5 Schwarzer Körper

Außerhalb der Erdatmosphäre misst man das Maximum des Sonnenspektrums bei einer Wellenlänge von $\lambda = 465$ nm

a) Betrachten Sie die Sonne näherungsweise als schwarzen Strahler und bestimmen Sie die Oberflächentemperatur T_S der Sonne.

b) Die vom Merkur ausgesandte Schwarzkörperstrahlung entspricht einer Temperatur von $T_M = 442,5$ K. Bestimmen Sie den Abstand r des Merkurs von der

Sonne unter der Annahme thermischen Gleichgewichts und eines kreisförmigen Orbits. Der Radius der Sonne beträgt $R_S = 6,96 \cdot 10^5$ km, der des Merkurs ist $R_M = 2439,7$ km. (Nehmen Sie an, dass die Oberfläche des Merkurs nicht reflektierend ist!)

Lösung

a) Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhält man sofort die Lösung für die gesuchte Temperatur:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{b}{T} \\ \rightarrow T &= \frac{b}{\lambda_{max}} = 6237 \text{ K} \end{aligned} \tag{14}$$

b) Die abgestrahlte Leistung der Sonne beträgt nach dem Stefan-Boltzmann- Gesetz

$$P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \tag{15}$$

mit σ als Stefan-Boltzmann-Konstante. Damit nun Gleichgewicht vorherrscht, muss die vom Merkurs absorbierte Strahlungsleistung gleich seiner emittierten sein:

$$P_{abs} = P_S \frac{\pi R_M^2}{4\pi r^2} = 4\pi R_M^2 \sigma T_M^4 = P_{em} \tag{16}$$

Setzt man nun noch die Strahlungsleistung PS der Sonne ein, muss nur noch nach r aufgelöst werden:

$$\Rightarrow r^2 = \frac{T_S^4}{T_M^4} \frac{R_S^2}{4} r = 6,914 \cdot 10^{10} m \tag{17}$$

6 Atomare Übergänge

Wir betrachten das wasserstoffähnliche Kalium Atom (${}^{39}_{19}Ka^{+18}$).

a) Wie groß ist die Ionisierungsenergie des letzten Elektrons, wenn sich dieses im Grundzustand befindet? Wie groß ist der Bahnradius des Grundzustandes?

b) Wie viel kinetische Energie hätte ein Neutron ($m_n = 1,65 \cdot 10^{-27}$ kg) mit der gleichen Wellenlänge, wie das in a) zur Ionisierung benötigte Photon?

Lösung

a) Für die Energie des Grundzustands ($n = 1$) gilt nach Bohr:

$$E_n = -13,6\ \text{eV}\frac{Z^2}{n^2} = 4,9\ \text{keV} \tag{18}$$

Damit wird zur Ionisierung gerade diese Energie benötigt.
Für den Bahnradius gilt:

$$r_n = a_B\frac{n^2}{Z} = 2,9 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \tag{19}$$

b) Die Wellenlänge des Photons berechnet sich zu:

$$\lambda = \frac{hc}{E} \tag{20}$$

Die kinetische Energie des des Neutrons mit gleicher Wellenlänge ergibt sich dann zu (keine relativistische Rechnung notwendig)

$$E_n = \frac{p^2}{2m} \tag{21}$$

Außerdem gilt die Beziehung von De Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{22}$$

Setzten wir diese Gleichung ineinander ein erhalten wir die kinetisch Energie des Neutrons

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = E_n = \frac{\frac{h}{\lambda}^2}{2m} = \frac{E^2}{2mc^2} = 12,9\ \text{meV} \tag{23}$$