FK Experimentalphysik 3, Lösung 4

1 Sterne als schwarze Strahler

Betrachten sie folgende Sterne:

1. Einen roten Stern mit einer Oberflächentemperatur von 3000 K
2. einen gelben Stern mit einer Oberflächentemperatur von 6000 K
3. einen blauen Stern mit einer Oberflächentemperatur von 10000 K

Hinweis: Nach dem Planckschen Strahlungsgesetz gilt für das spektrale Emissionsvermögen eines schwarzen Strahlers:

$$M(\lambda, T) = \frac{c}{4}u(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp[\frac{hc}{\lambda k_B T}] - 1} \tag{1}$$

Berechnen sie für jeden, unter der Annahme das sie sich wie schwarze Strahler verhalten:

(a) das gesamte Emissionsvermögen (gesamte abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit)

(b) die Wellenlänge λ_{max} der mit maximaler Intensität emittierten Strahlung

(c) den Bruchteil der Strahlungsenergie, der im Sichtbaren Spektralbereich (400 nm - 700 nm) abgestrahlt wird. Verwenden sie dabei die Näherung kleiner Wellenlängen (bzw. großer Frequenzen)

Lösung

a) Nachdem Stefan Boltzmann Gesetz gilt: $R = \sigma T^4$

   1. Roter Stern: $R = 4.59 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
   2. Gelber Stern: $R = 73,5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
   3. Blauer Stern: $R = 567 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$

b) Für die Wellenlänge nutzen wir das Wiensches Verschiebungsgesetz: $\lambda_{max} = \frac{0{,}2898\text{cmK}}{T}$

   1. Roter Stern: $\lambda_{max} = 967$ nm

2. Gelber Stern: $\lambda_{max} = 483$ nm
3. Blauer Stern: $\lambda_{max} = 289$ nm

c) Zu berechnen ist folgendes:

$$R = \frac{c}{4}u(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \int_{400nm}^{700nm} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{2}$$

Nun nutzen wir folgende Näherung

$$e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} \tag{3}$$

Wir substituieren:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{hc}{\lambda^2 k_B t}dx \tag{4}$$

Damit wird unser Integral zu

$$R_S = \frac{-2\pi k B^4 t^4}{h^3 c^2} \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} = \frac{-2\pi k B^4 t^4}{h^3 c^2} [e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_{x_1}^{x_2} \tag{5}$$

Durch Einsetzen erhalten wir dann

1. Roter Stern: $R_S = 0,37 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
2. Gelber Stern: $R_S = 27,2 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
3. Blauer Stern: $R_S = 173,5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$

Der Anteil im sichtbaren Bereich $r = \frac{R_S}{R}$ ist

1. Roter Stern: $r = 8,1\%$
2. Gelber Stern: $r = 37,1\%$
3. Blauer Stern: $r = 30,6\%$

2 Photonen und Rückstoß

Ein Photon, das von einem Atom ausgesandt wird, überträgt einen Rückstoßimpuls

(a) Wie groß ist die kinetische Energie die dabei auf das Atom übertragen wird ?

(b) Berechnen sie nun explizit die Rückstoßenergie

1. bei Aussendung der Quecksilberspektrallinie ($\lambda = 253,7$ nm; $M_{Hg} = 200,6$ u)

2. bei Aussendung eines γ-Quanten der Energie 1.33 MeV durch Nickel ($M_{Ni} = 58,5$ u)

(c) Vergleichen sie diese Werte mit der Energieunschärfe aufgrund der begrenzten Lebensdauer der Übergänge $\tau_{Hg} \approx 10^{-8}s; \tau_{Ni} \approx 10^{-14}s$

Lösung

a) Die Ruheenergie eines einzelnen Nukleons liegt im GeV Bereich, daher kann ein Übergang selbst bis MeV keine Geschwindigkeiten im relativistischen Bereich erzeugen. Es gilt also:

$$p_A = \sqrt{2M_A Ekin, A} = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{6}$$

das können wir nach der kinetischen Energie auflösen

$$E_{kin} = \frac{E_\gamma^2}{2M_A c^2} = \frac{h^2}{2M_A \lambda^2} \tag{7}$$

b) Wir setzen die gegebenen Werte ein.

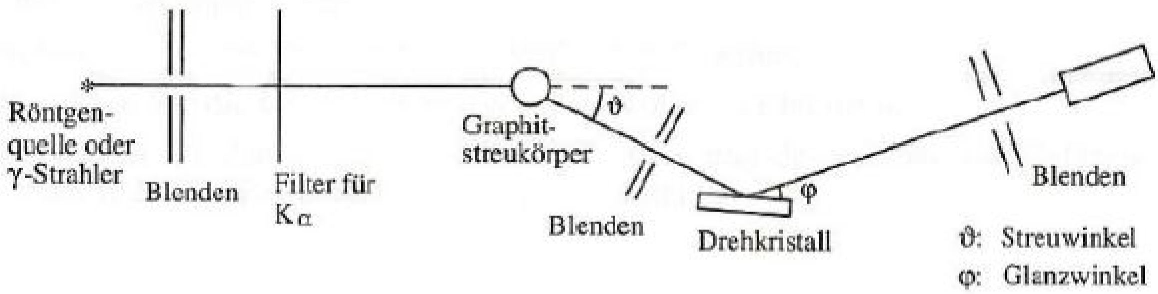
1. Für Quecksilber: $E_\gamma = 4,89$ eV und $E_{kin,A} = 1,02 \cdot 10^{-29} J = 6,4 \cdot 10^{-11}$ eV
2. Für Nickel: $E_{kin,A} = 2,59 \cdot 10^{-18} J = 16,2$ eV

c) Wir nutzen die Unschärferelation $\Delta E \Delta t > h$

1. Für Quecksilber gilt $\Delta E = 4,14 \cdot 10^{-8}$ eV
2. Für Nickel gilt $\Delta E = 4,14 \cdot 10-2$ eV

3 Compton-Streuung

(a) In einem Versuch werden Hüllenelektronen mit Röntgenstrahlung beschossen. Ab welcher Wellenlänge der Photonen kann man die Elektronen als frei betrachten? Mit dem folgenden Versuchsaufbau werden Messungen durchgeführt. Hierbei werden zunächst in einer Röntgenröhre γ-Quanten erzeugt. Durch Blenden und einen Filter gelangen nur Quanten mit einer speziellen Richtung und Frequenz im Streukörper an. Nachdem die Quanten gestreut wurden, wird mit Hilfe von Bragg-Reflexion ihre neue Frequenz bestimmt.



(b) Bei einer Messung mit einem Winkel von $\theta = 73°$ tritt Strahlung auf, deren Wellenlänge sich durch den Streuprozess verdoppelt hat. Berechnen sie die Frequenz der einfallenden Strahlung.

(c) Berechnen sie nun die Geschwindigkeit des gestreuten Elektrons. Ist eine relativistische Rechnung notwendig ?

Lösung

a) Es wird eine Energie von 100 keV benötigt damit man gebundene Elektronen als frei annehmen kann. Daraus errechnet sich die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{hc}{e} \approx 12,4 \text{ pm} \tag{8}$$

b) Die Compton Beziehung besagt

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \approx 0,708 \cdot \lambda_C \tag{9}$$

Da sich die Wellenlänge verdoppelt hat, gilt für die ursprüngliche Wellenlänge

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \Delta\lambda = 2\lambda \\ \Rightarrow \lambda &= \Delta\lambda \approx 0,708\lambda_C \\ f &= \frac{c}{0.708\lambda_C} \approx 1,69 \cdot 10^{20} \text{ Hz} \end{aligned} \tag{10}$$

c) Aufgrund der Energieerhaltung ist die Energie des Elektrons nach dem Stoß

$$E_{kin} = E_\gamma - E'_\gamma = hc\left(\frac{1}{0,708\lambda_C - \frac{1}{1,416\lambda_C}}\right) \approx 349 \text{ keV} \tag{11}$$

Da dies ähnlich groß wie die Ruhemasse eines Elektrons (511 keV) ist, muss relativistisch gerechnet werden

$$E_{kin} + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\gamma^2}}c^2 \tag{12}$$

Mit $\gamma = \frac{v^2}{c^2}$ können wir nach v auflösen und erhalten

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{E_0}{E_{kin} + E_0}\right)^2} \approx 0,64c \approx 1,94 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{13}$$

4 Eigenschaften von Materiewellen

a) Welche Wellenlänge besitzen Neutronen mit kinetischer Energie von $E_{kin} = 500$ eV?

b) Wie groß wäre die Energie eines Photons mit gleicher Wellenlänge?

c) Warum spielt die De Broglie Wellenlänge bei einem fahrenden Formel 1 Rennwagen keine Rolle ($m = 850$ kg, $v = 360$ km/h)?

Lösung

a) Für den Impuls eines nicht-relativistischen Neutrons gilt

$$p = \sqrt{2mE} = \frac{h}{\lambda} \tag{14}$$

Aufgelöst nach λ ergibt sich

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1,29 \cdot 10^{-12} \text{ m} \tag{15}$$

b) Die Energie eines Photons mit Wellenlänge λ ist

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 963 \text{ keV} \tag{16}$$

c) Für den Rennfahrer bekomme ich eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 7,79 \cdot 10^{-39} \text{ m} \tag{17}$$

Diese Wellenlänge ist so klein, dass sie nicht mehr aufgelöst werden kann. Daher spiet die De Broglie Wellenlänge keine Rolle bei makroskopischen Gegenständen.

5 Unschärfe Relation

(a) Nehmen Sie an, der Impuls eines Teilchens wird mit einer Genauigkeit von 1 : 1000 gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5 g und der Geschwindigkeit 2 m/s handelt? Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron mit der Geschwindigkeit 10000 km/s handelt?

(b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer 10^{-8} s befindet? Wie groß ist die minimale Unschärfe in der Wellenlänge des beim Übergang in den Grundzustand emittierten Lichts, wenn die Energie des angeregten Zustands 3,39 eV beträgt?

(c) Das Z_0, das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, ist extrem kurzlebig. Im Experiment zeigt es eine Energieunschärfe von ca. 2,5 GeV. Wie groß ist seine Lebensdauer, wenn Sie davon ausgehen, dass das durch die Unschärferelation gegebene Limit erfüllt ist?

Lösung

a) Es gilt die Unschärferelation zwischen Ort und Impuls:

$$\Delta x \Delta p > h \tag{18}$$

Gemäß Angabe ist $\Delta p = \epsilon p$ mit $\epsilon = 0,001$. Außerdem ist $p = mv$. Also:

$$\Delta x > \frac{h}{\epsilon m v} \tag{19}$$

Einsetzen für den 1.Fall liefert

$$\Delta x > 6,626 \cdot 10^{-29} \text{ m} \tag{20}$$

Diese Ortsunschärfe ist in allen realistischen Situationen völlig vernachlässigbar. Für den 2. Fall

$$\Delta x > 7,28 \cdot 10^{-8} \tag{21}$$

Die Ortsunschärfe liegt also im Nanometerbereich und kann u.U. von Bedeutung sein.

b) Es gilt die Unschärferelation zwischen Energie und Zeit:

$$\Delta E \Delta t > h \tag{22}$$

Einsetzen ergibt

$$\Delta E > 6,63 \cdot 10^{-26}\mathrm{J} = 4,14 \cdot 10^{-7}\mathrm{eV} \tag{23}$$

Dies ist selbst in Elektronenvolt ein eher kleiner Wert. Das bedeutet, dass 10^{-8} s im atomaren Bereich eine recht große Lebensdauer darstellt. Um aus der gegebenen Energieunschärfe die Wellenlängenunschärfe des emittierten Photons zu berechnen, benötigt man den Zusammenhang zwischen Energie und Wellenlänge für Photonen. Dieser ergibt sich aus

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ \omega &= kc \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Rightarrow E &= \frac{hc}{\lambda} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{hc}{E} \end{aligned} \tag{24}$$

Durch Ableiten findet man daraus die Relation zwischen den (kleinen) Unschärfen ΔE und $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{hc}{E^2}\Delta E \tag{25}$$

(Ein Minuszeichen wurde unterdrückt, da Unschärfen per Definition positiv sind, siehe Gaußsche Fehlerfortpflanzung.) Einsetzen ergibt

$$\Delta\lambda = 4,47 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{nm} \tag{26}$$

was wiederum eine sehr kleine Wellenlängenunschärfe ist.

c) Es soll das Limit der Unschärferelation zwischen Energie und Zeit erfüllt sein, also:

$$\Delta E \Delta t > h \tag{27}$$

Also

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E} = 1,66 \cdot 10^{-24} \tag{28}$$

Dies ist auch in subatomaren Maßstäben eine eher kurze Lebensdauer was mit der sehr großen Energieunschärfe zusammenhängt.

6 Zirkonium

In dieser Aufgabe wird wasserstoffartiges Zirkonium ($^{90}_{40}Zr^{+39}$) betrachtet.

(a) Berechnen Sie nach dem Bohr'schen Atommodell den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand für

  i) ein Elektron

  ii) ein negatives Myon μ^- (Masse: $m_\mu = 207\ m_e$) im Feld eines Zirkonium-Kerns.

(b) Nehmen Sie nun an, ein Anti-Proton werde von einem Zirkonium-Kern eingefangen.

  i) Welche ist die tiefste Bohr'sche Bahn, auf der das Anti-Proton den Kern noch nicht berührt? Hinweis:Radius Zirkoniumkern: 5,3 fm, Radius Antiproton: 1 fm

  ii) Wie groß ist die Bindungsenergie für diese Bahn?

Lösung

a) Den Bahnradius im Bohrschen Atommodell erhält man mit dem Bohrschen Radius $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m_e}$

$$r_n = \frac{n^2}{z} a_B \tag{29}$$

Die Gesamtenergie im Grundzustand mit der Rydbergenergie $R_\infty = E_R = 13,6$ eV

$$e_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R \tag{30}$$

  i) Mit n = 1 und Z = 40 erhält man

$$r_1(Zr) = 1,33 \cdot 10^{-12}\ \text{m}; \quad E_1(Zr) = -21,8\ \text{keV} \tag{31}$$

ii) Mit $n = 1$, $Z = 40$ und m_μ erhält man für a_B und E_R

$$\begin{aligned} a_B^\mu &= \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m_\mu} \\ \Rightarrow \; a_B^\mu &= \frac{1}{207} a_B \\ E_R^\mu = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_\mu Z^2}{hbar^2 n^2} \; \Rightarrow \; E_R^\mu &= 207 E_R \end{aligned} \tag{32}$$

Einsetzen ergibt

$$r_1^\mu(Zr) = 6,42 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}; \quad E_R^\mu(Zr) = -4,51\ \mathrm{MeV} \tag{33}$$

b) i

i) Abermals mit dem Bohrschen Radius

$$r_n^{\bar{p}} = \frac{m_e}{m_{\bar{p}}} a_B \frac{n^2}{Z} = \frac{a_B}{1840}\frac{n^2}{Z} = 7,2 \cdot 10^{-16}\mathrm{m} \cdot n^2 \tag{34}$$

Damit das Anti-Proton und der Zirkoniumkern sich nicht berühren, muss gelten

$$\begin{aligned} r_n^{\bar{p}} &> R = R_{Zr} + R_{\bar{p}} \\ r_n^{\bar{p}} = 7,2 \cdot 10^{-16}\mathrm{m} \cdot n^2 &> R = 6,3 \cdot 10^{-15}\mathrm{m} \\ \Rightarrow n = 3 : r_n^{\bar{p}} &= 6,48 \cdot 10^{-15}\mathrm{m} \end{aligned} \tag{35}$$

ii) Die Bindungsenergie E_n erhält man aus

$$E_n = -\frac{m_{\bar{p}} e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{m_{\bar{p}}}{m_e} E_R \frac{Z^2}{n^2} \tag{36}$$

Einsetzen ergibt

$$E_3 = -1840 \frac{40^2}{3^2} \cdot 13,6\mathrm{eV} = -4,45\ \mathrm{MeV} \tag{37}$$