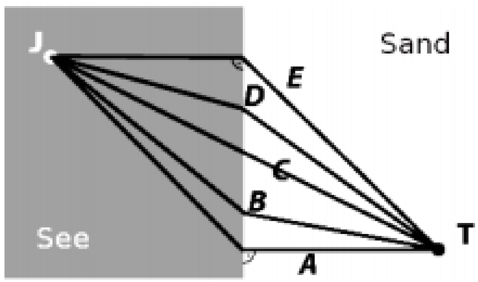
FK Ex 4 - Musterlösung Dienstag

1 Snellius

Tarzan wird in einem ruhigen See am Punkt J von einem Krokodil angegriffen. Jane, die sich an Land mit gezücktem Buschmesser am Punkt T befindet, möchte ihm zu Hilfe eilen. Jane rennt mit 12 m/s und schwimmt mit 3 m/s. Sie wählt den in der Skizze eingezeichneten Weg A. Sie kommt knapp zu spät. Auf welchem der eingezeichneten Wege hätte Jane die größte Chance gehabt rechtzeitig bei Tarzan zu sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz.



Lösung

Die Wege A und B kommen von vornherein nicht in Frage. Da Wasser die langsamere Fortbewegungsgeschwindigkeit für Jane besitzt, ist es als das dichtere Medium anzusehen. Somit ist der Weg durch die Brechung vom Lot weg sicher nicht der kürzeste Weg (und ganz nebenbei physikalisch nicht möglich). Fall C wäre zu wählen, wenn die Geschwindigkeit in Wasser und auf Land gleich groß wären. Da dies aber nicht der Fall ist, ist auch diese Strecke zu verwerfen. Es bleiben also noch Möglichkeit D und E. Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt, dass

$$\frac{\sin \theta_{\text{Wasser}}}{\sin \theta_{\text{Sand}}} = \frac{n_{\text{Sand}}}{n_{\text{Wasser}}} = \frac{v_{\text{Wasser}}}{v_{\text{Sand}}} \tag{1}$$

ist. n_i gibt den Brechungsindex des jeweiligen Mediums an und v_i die Fortbewegungsgeschwindigkeit. Für Weg E müsste demnach $\sin \theta_{\text{Sand}} > 1$ sein, was nicht möglich ist. Es bleibt also nur Weg D übrig.

2 Vergrößerungslinse

Sie sollen einer Linse ein 10 fach vergrößertes Bild eines Gegenstandes G auf einem Bildschirm B entwerfen, der 3 m von G entfernt ist. Welche Brennweite muss die Linse haben?

Lösung

Aus der Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{2}$$

und dem Abbildungsmaßstab $B/A = b/g = 10$ und $g + b = 3$ m folgt:

$$11\,g = 3 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{3}{11}\text{m} \tag{3}$$

$$b = \left(3 - \frac{3}{11}\right) \text{ m} = \frac{30}{11} \text{ m} \tag{4}$$

$$f = \frac{gb}{g+b} = 0.25 \text{ m} \tag{5}$$

3 Brillenträger

Die Dioptrienzahl D ist gegeben durch $D = \frac{1}{f}$

(a) Kurzsichtigkeit eines Auges wird durch ein Brillenglas der Dioptrienzahl $D = -2$ korrigiert. Bestimmen Sie die maximale Entfernung s_{max}, auf die das Auge ohne Brille einstellen kann.

(b) Ein altersweitsichtiges Auge kann nur noch bis herab zu $s_{\text{min}} = 40$ cm scharf stellen. Bestimmen Sie die erforderliche Dioptrienzahl einer Brille, die scharfes Sehen bis $s_0 = 20$ cm ermöglicht. Bis zu welcher maximalen Entfernung kann das Auge mit Brille noch scharf stellen?

Lösung

(a) Mit

$$D = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = -0.5 \text{ m} \tag{6}$$

Ziel: parallele Strahlen ($g \leftarrow \infty$) fokussieren im Punkt s_{max} des Auges. Damit also:

$$b = f = -s_{\text{max}} \quad \Rightarrow s_{\text{max}} = 0.5 \text{ m} \tag{7}$$

(b) Der Gegenstand bei $g = 0.2$ m soll erreicht werden. Das Bild bei $b = -0.4$ m ist virtuell und muss auf der gleichen Seite entstehen, sowie den Punkt minimaler Scharfstellfähigkeit treffen.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = 0.4 \text{ m} \quad D = 2.5 \tag{8}$$

scharf sehen bis zu dem Punkt bei dem Strahlen parallel in die Linse kommen (also $b \to \infty$), bis $g = 0.4$ m möglich.

4 Zoomobjektiv

Zwei dünne Linsen befinden sich im Abstand d zueinander und haben eine Brennweite von 70 mm. Dadurch, dass der Abstand d veränderlich ist, soll ein Zoom-Objektiv realisiert werden.

(a) Was ist die minimale Brennweite des Zoomobjektivs und warum?

(b) Was ist die größte theoretische Brennweite, die mit dieser Anordnung erreicht werden kann? Was passiert, wenn der Abstand noch weiter vergrößert wird? Skizzieren Sie den Strahlenverlauf durch das Objektiv in den beiden Grenzfällen minimaler und maximaler theoretischer Brennweite.

(c) Die maximale Brennweite soll $f = 280$ mm betragen. Wie muss der Abstand der Linsen gewählt werden?

Lösung

(a) Wir verwenden die Gleichung für ein Linsensystem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \tag{9}$$

Jetzt wird $f_1 = f_2 = 70$ mm gesetzt. Man sieht sofort, dass man die minimale Brennweite erhält, wenn der Abstand zwischen den beiden Linsen 0 ist. Dann gilt für die Brennweite des Systems:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{70 \text{ mm}} \quad \Rightarrow \quad f = 35 \text{ mm} \tag{10}$$

(b) Die Brennweite in Abhängigkeit des Abstands lautet

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{70 \text{ mm}} - \frac{d}{4900 \text{ mm}^2} \tag{11}$$

Wir können die Brennweite theoretisch unendlich groß machen. Dies erreichen wir, wenn der Abstand zwischen den beiden Linsen gleich 140 mm ist, da dann gilt $1/f = 0$. Wenn man den Abstand noch weiter vergrößert, wird die Brennweite negativ. Man erhält eine Streuwirkung.

(c) Die Gleichung oben kann nach d aufgelöst werden und man erhält $f = 280$ mm für den Abstand zwischen den Linsen $d = 122.5$ mm.

5 Okular (!)

Ein Okular bestehe aus zwei dünnen Plankonvexlinsen mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 im Abstand $d = 2.604$ cm voneinander.

(a) Das Okular soll als Lupe die Vergrößerung $V = 10$ cm besitzen. Wie groß muss dann die Brennweite f gewählt werden (deutliche Sehweite ≈ 25 cm)?

(b) Die Brennweite f des Okulars soll bei der Wellenlänge λ_0 unabhängig von kleinen Wellenlängenänderungen sein (Achromat). Bei λ_0 habe das Material beider Linsen den Brechungsindex $n = 1.4$. Berechnen Sie die Krümmungsradien r_1 und r_2 der beiden Linsen

Lösung

(a) Die Vergrößerung einer Lupe ist gegeben durch $v = s/f$, mit der Brennweite f und der deutlichen Sehweite s. Dann ist die Brennweite des Okulars:

$$f = \frac{s}{v} = 2.5 \text{ cm} \tag{12}$$

(b) Für die Brennweite einer dünen Linse gilt allgemein:

$$\frac{1}{f_i} = (n-1)\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right) \tag{13}$$

Betrachtet man nun die hier vorliegenden plankonvexen Linsen, d. h. setzt man für die linke Linse $r_{11} = \infty$, $r_{12} = r_1$ und für die rechte Linse dementsprechend $r_{21} = r_2$, $r_{22} = \infty$, so erhält man folgende Brennweiten:

$$\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + \frac{(n-1)^2 d}{r_1 r_2} \tag{14}$$

$$\Rightarrow f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)\left[r_1 - r_2 + (n-1)d\right]} \tag{15}$$

Da die Brennweite unabhängig von kleinen Änderungen in der Wellenlänge sein soll, muss die Beziehung $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda = 0$ gelten, wobei $n = n(\lambda)$. D. h.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{r_1 r_2}{(n-1)\left[r_1 - r_2 + (n-1)d\right]^2} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(r_1 - r_2 + (n-1)d) + (n-1)d\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right] = 0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 + 2(n-1)d = 0 \tag{17}$$

Weiteres Umformen und Einsetzen liefert

$$r_1 r_2 = (n-1)fr_1 - (n-1)fr_2 + (n-1)^2 fd \tag{18}$$

und

$$r_1(r_1 + 2(n-1)d) = -(n-1)^2 fd. \tag{19}$$

Das lässt sich nun nach r_1 auflösen:

$$r_1 = (n-1)d\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{f}{d}}\right] \tag{20}$$

Man erhält durch Einsetzen der Zahlenwert dann zwei Lösungen:

$$r_1 = -0.83 \text{ cm} \tag{21}$$

$$r_2 = 1.25 \text{ cm} \tag{22}$$

Vertauschung der beiden Linsen im Okular ändert die Vorzeichen der Lösungen.

6 Mikroskop

Ein Mikroskop besteht aus einem Objektiv mit einer Brennweite von $f_1 = 5$ mm und einem Okular mit einer Brennweite von $f_2 = 20$ mm. Die Bildweite des Objektivs soll $b_1 = 150$ mm, die des Okulars $b_2 = -260$ mm betragen. Der Durchmesser des Objektivs sei $D = 2$ mm.

(a) Skizzieren Sie den Strahlengang des Mikroskops mit Bild und Zwischenbild.

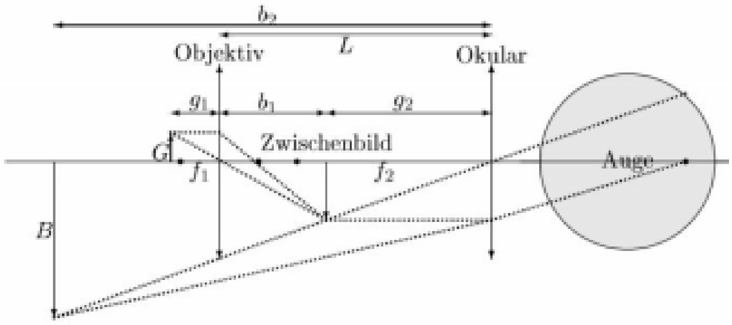
(b) wie groß ist der Abstand L zwischen Objektiv und Okular?

(c) Geben Sie die Vergrößerung der beiden Linsen und des gesamten Mikroskops an.

(d) Wie groß sind die kleinsten Strukturen, die von diesem Mikroskop bei Verwendung von Licht der Wellenlänge $\lambda = 550$ nm noch aufgelöst werden können?

Lösung

(a) Das Objektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild zwischen Objektiv und Okular. Das Zwischenbild liegt innerhalb der Brennweite des Okulars, weshalb es schließlich auf ein virtuelles Bild abgebildet wird.



(b) Der Abstand L zwischen Objektiv- und Okularlinse setzt sich aus der Bildweite des Objektivs b_1 und der Gegenstandsweite des Okulars g_2 zusammen. Letztere muss zuerst noch berechnet werden, mit der Linsengleichung erhält man:

$$g_2 = \frac{b_2 \cdot f_2}{b_2 - f_2} = 18.57 \text{ mm} \tag{23}$$

Der Abstand zwischen den Linsen ist dann:

$$L = b_1 + g_2 = 168.57 \text{ mm} \tag{24}$$

(c) Für die Vergrößerung des Objektivs benötigt man noch seine Gegenstandsweite, mit der Linsengleichung erhält man sie als:

$$g_1 = \frac{b_1 \cdot f_1}{b_1 - f_1} = 5.17 \text{ mm} \tag{25}$$

Die Vergrößerungen der Einzellinsen sind dann:

$$V_{\text{Objektiv}} = -\frac{b_1}{g_1} = -29 \tag{26}$$

$$V_{\text{Okular}} = -\frac{b_2}{g_2} = 14 \tag{27}$$

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops erhält man als:

$$V_{\text{Mikroskop}} = V_{\text{Objektiv}} \cdot V_{\text{Okular}} = -406 \tag{28}$$

(d) Zur Abschätzung des Auflösungsvermögens benutzen wir das Rayleigh-Kriterium:

$$\alpha_{\text{min}} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{29}$$

Mit Kleinwinkelnäherung gilt

$$\alpha_{\text{min}} \approx \tan(\alpha_{\text{min}}) = \frac{d}{g_1} \tag{30}$$

wobei d die kleinste auflösbare Struktur ist. Auflösen der Gleichung führt zu:

$$d = 1.22 \cdot \frac{g_1 \cdot \lambda}{D} = 1.73\ \mu\text{m} \tag{31}$$