FK Ex 4 - Musterlösung Montag

1 Wellengleichung

Leiten Sie die Wellengleichungen für **E** und **B** aus den Maxwellgleichungen her. Berücksichtigen Sie dabei die beiden Annahmen, die in der Vorlesung für den Fall der Optik angesprochen wurden.

Lösung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times (-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Unter Berücksichtigung von $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ergibt sich der Ausdruck aus der Vorlesung.

2 Fouriertrafo

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $E(\omega)$ einer Gaußschen Funktion $E(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]$. **Hinweis:** $\int_0^\infty \exp[-at^2]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a}\right]$.

Lösung

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}\omega t\right] \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}t = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \cos(\omega t)\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

Der zweite Ausdruck entfällt, da die Integration über den gesamten Bereich bei einer ungeraden Funktion 0 ist. Also:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \cos(\omega t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \cos \omega t \mathrm{d}t = \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{2\sigma^2\pi} \exp\left[-\frac{\omega^2 2\sigma^2}{4}\right] = \sigma \exp\left[-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right]$$

3 Elektromagnetische Welle im Vakuum

Eine harmonische elektromagnetische Welle im Vakuum hat die Form:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Intensität

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{5}$$

ist.

Lösung

Berechnung des Poynting-Vektors da $I = \langle S \rangle$:

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{6}$$

Man erhält

$$I = \langle S \rangle = c^2 \epsilon_0 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle cos^2(kx - \omega t) \rangle \tag{7}$$

Das zeitliche Mittel über $\cos^2$ ist bekanntermaßen $1/2$ woraus

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \tag{8}$$

folgt.

4 Sonnensegel

Die Sonne erzeugt auf Höhe der Erdumlaufbahn eine Intensität von 1300 $\mathrm{W/m^2}$.

(a) Berechnen Sie die Stärke des elektrischen und magnetischen Feldes der Sonnenstrahlung.

(b) Berechnen Sie den Strahlungsdruck der Sonnenstrahlung.

(c) Wie groß müsste das Sonnensegel sein, das eine Raumsonde mit Masse 1000 kg aus einer niedrigen Erdumlaufbahn weiter von der Erde wegtreiben könnte unter der Annahme eines Einfallwinkels der Sonne von 30° (Fallbeschleunigung kann als konstant $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ angenommen werden; die gesamte auftreffende Strahlung wird absorbiert.)

Lösung

(a) Man nutzt

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \tag{9}$$

stellt um und erhält schließlich $E_0 = \sqrt{2I/c\epsilon_0} = 989$ V/m. Das Magnetfeld ist dann $B = E/c = 3.23 \cdot 10^{-6}$ T.

(b) Der Strahlungsdruck ist

$$P = \frac{I}{c} = 4.3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2} \tag{10}$$

(c) Unter einem Winkel von 30° beträgt der Druck nur noch

$$P_{30^\circ} = \frac{I}{c} \cdot \sin(30^\circ) = 2.15 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}. \tag{11}$$

Die Gewichtskraft der Raumsonde ist $F_{\text{Sonde}} = 9810$ N und damit ist die minimal Größe des Sonnensegels

$$A_{\text{Sonnensegel}} = \frac{9810\ \mathrm{N}}{4.3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}} = 4562\ \mathrm{km^2} \tag{12}$$

5 Polarisation

(a) Licht der Intensität 100 W/m^2 aus einer Halogenlampe fällt auf einen idealen Linearpolarisator mit senkrechter Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensität bei Austritt? Hinter den ersten Polarisator schaltet man nun einen weiteren Linearpolarisator mit horizontaler Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensität nach dem zweiten Polarisator? Zum Schluss bringt man noch einen dritten Linearpolarisator zwischen die beiden ersten. Seine Durchlassrichtung ist um 45° gedreht. Wie groß ist nun die Intensität nach allen drei Polarisatoren? Erklären Sie das auftretende Paradoxon.

(b) Wir leiten einen Lichtstrahl durch zwei gekreuzte perfekte Polarisationsfilter zwischen den sich ein dritter, ebenfalls perfekter Polarisationsfilter befindet, der mit der Kreisfrequenz ω rotiert. Zeigen Sie, dass der transmittierte Lichtstrahl mit der Frequenz 4ω moduliert ist. Wie verhalten sich Amplitude und Mittelwert der transmittierten zur einfallenden Flussdichte?

Lösung

(a) Nach Durchgang durch eine Folie bleibt die Hälfte der Intensität über, denn Licht kann ja immer in zwei senkrechte Komponenten aufgespalten werden. Also:

$$I_1 = 50\ \mathrm{W/m^2} \tag{13}$$

Dann hat man eine gekreuzte Anordnung: Es kommt gar keine Intensität mehr durch: $I = 0$. Alle horizontalen Komponenten hat man ja ausgefiltert. Führt man aber einen dritten Polarisator (im Winkel von 45° hier) ein, erhält man wieder Intensität. Nach dem ersten Filter ist die Intensität nur noch die Hälfte der eingestrahlten Intensität. Nach dem zweiten Filter ist noch

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2(45°) = \frac{I_0}{4} \tag{14}$$

der eingestrahlten Intensität übrig. Das Gleiche gilt für den dritten Filter:

$$I_3 = \frac{I_0}{8} = 12.5\ \mathrm{W/m^2} \tag{15}$$

Zur Auflösung des Paradoxons: Die schwingenden Elektronen im zweiten Filter erzeugen wieder eine Komponente in der horizontalen Achse. Das linear polarisierte Licht dieses Filters lässt sich eben wieder in zwei senkrechte Komponenten zerlegen, die nun eben wieder eine geeignete Komponente erhalten. Diese Komponente wird also durch den Filter und den in ihm angeregten Schwingungen wieder erzeugt.

(b) Der einfallende Lichtstrahl ist unpolarisiert. Daher erhält man sofort, dass $I_1 = I_0/2$ ist. Weiterhin wird $I_2 = I_1 \cdot \cos^2(\omega t)$ und $I_3 = I_2 \cdot \cos^2(90° - \omega t)$ sein. Mit $cos^2(90° - \omega t) = \sin^2 \omega t$ ergibt sich

$$I_3 = \frac{I_0}{2}\cos^2(\omega t)\sin^2(\omega t) = \frac{I_0}{8}\sin^2(2\omega t) = \frac{I_0}{16}(1 - \cos(4\omega t)) \tag{16}$$

Und das ist die gesuchte Frequenz 4ω. Vier Mal pro Umdrehung erhält man also gekreuzte Polarisatoren und damit keine Intensität:

$$I_{3,\mathrm{min}} = 0 \qquad I_{3,\mathrm{max}} = \frac{I_0}{8} \tag{17}$$

Für den Mittelwert ergibt sich:

$$\bar{I}_3 = \frac{I_0}{16} \tag{18}$$

6 Glasfaser

Ein Glasfaserkabel hat einen Kernradius von a mit einem Mantel. Die Brechzahl des Kerns se $n_K = 1.457$, die des Mantels $n_M = 1.448$. r sei die Radialkoordinate. Ein Lichtstrahl treffe unter dem Einfallswinkel α beim $r = 0$ auf die Stirnfläche des Kabels. Bis zu welchem Winkel α_{max} wird er an der Grenzfläche Kern/Mantel der Glasfaser totalreflektiert?

Lösung

Im Faserkern ist der Grenzwinkel für die Totalreflexion

$$\theta_{\text{TR}} = \arcsin\left(\frac{n_M}{n_K}\right) = 83.63^\circ. \tag{19}$$

Zum Lot auf der Stirnfläche entspricht dies $90^\circ - \theta_{\text{TR}} = 6.37^\circ$. Dieser Winkel wird für alle Lichtstrahlen die steiler als

$$\alpha_{\text{max}} = \arcsin\left(\sin(6.37^\circ) \cdot n_K\right) = 9.3^\circ \tag{20}$$

einfallen, unterschritten.

7 Reflexion und Polarisation

(a) Eine Taucherin befindet sich in einer Tiefe von 10 m unter dem Wasserspiegel und schaut nach oben. Wie groß ist die Meeresoberfläche, durch die hindurch sie Objekte außerhalb des Wasser sehen kann?

(b) Unter welchem Winkel muss man unpolarisiertes Licht in Luft auf eine Glasplatte $n_2 = 1.61$ einfallen lassen, damit der reflektierte Anteil vollständig linear polarisiert ist? Wie ist der Vektor der elektrischen Feldstärke der reflektierten Lichtwelle dann orientiert?

Lösung

(a) Zuerst berechnet man den Grenzwinkel der Totalreflexion:

$$\sin\theta_t = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.33} = 0.752 \quad \Rightarrow \quad \theta_t \approx 48.8^\circ \tag{21}$$

Daraufhin wird der Radius der runden Wasseroberfläche berechnet durch den die Taucherin hindurch sehen kann:

$$\tan\theta_t = \frac{r}{10\text{ m}} \quad \Rightarrow \quad r = 10\text{ m}\cdot\tan\theta_t \approx 11.4\text{ m} \quad \Rightarrow \quad A = \pi r^2 \approx 409\text{ m}^2 \tag{22}$$

(b) Das einfallende Licht ist nicht polarisiert. Damit das reflektierte Licht polarisiert ist, muss es im Brewster-Winkel reflektiert werden:

$$\tan\theta_\text{B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.61}{1} \quad \Rightarrow \quad \theta_\text{B} = 58.15^\circ \tag{23}$$

Unter dem Brewster-Winkel wird kein parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht reflektiert. Folglich ist das Licht bzw. der elektrische Feldvektor senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.

8 Oszillatormodell

Aus dem Oszillatormodell der Dispersion erhält man für verdünnte Gase die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e}\cdot\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega} \tag{24}$$

N, ω_0 und γ sind die Teilchendichte, Resonanzfrequenz und Dämpfungskonstante des Mediums.

(a) Wie lautet der Beitrag zu $\epsilon(\omega)$, der von der Bewegung freier Elektronen in einem Metall herrührt?

(b) Leiten Sie ausgehend vom ohmschen Gesetz $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ für eine harmonische elektromagnetische Welle die Formel für die Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ ab. Gehen Sie dabei von der Zerlegung des dielektrischen Verschiebungsstrom $\partial/\partial t\mathbf{D} = \partial/\partial t\mathbf{D}_\text{gebunden} + \mathbf{j}$ in einen von den gebundenen und einen von den freien Elektronen herrührenden Anteil aus.

Lösung

(a) Die Rückstellkraft ist 0, d. h. $\omega_0 = 0$ für den Betrag der freien Elektronen:

$$\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega\gamma)} = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}\frac{f_0}{\omega(\omega - \mathrm{i}\gamma)} \tag{25}$$

(b) Für die dielektrische Verschiebung gilt mit der in Teil (a) gefundenen Zerlegung von $\epsilon(\omega)$ in die Anteile von gebundenen und frei beweglichen Elektronen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \left(\epsilon_{\text{gebunden}} - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_0}{\omega(\omega - \mathrm{i}\gamma)} \right) \mathbf{E} \tag{26}$$

$$= \mathbf{D}_{\text{gebunden}} - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_0}{\omega(\omega - \mathrm{i}\gamma)} \mathbf{E}$$

Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_{\text{gebunden}} - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_0}{\omega(\omega - \mathrm{i}\gamma)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \tag{27}$$

Mit σ aus der Angabe ergibt sich

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_0}{\omega(\omega - \mathrm{i}\gamma)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \tag{28}$$

Setzt man für das harmonisch schwingende Feld $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cdot \exp[-\mathrm{i}\omega t]$ an, so ergibt sich

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_0}{(-\gamma - \mathrm{i}\omega)} \tag{29}$$