Ferienkurs

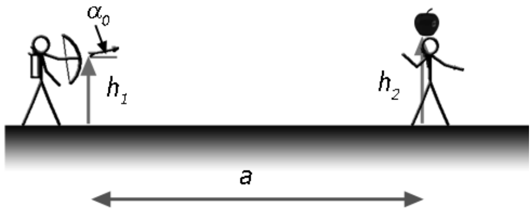
Experimentalphysik I: Mechanik

Wintersemester 15/16

Probeklausur - Lösung

1. Wilhelm Tell (13 Punkte)

Wilhelm Tell will mit einem Pfeil ($m_1 = 50g$) einen Apfel ($m_2 = 200g$) vom Kopf seines Sohnes schießen. Die Luftreibung ist zu vernachlässigen.



Berechnen Sie

1. die Abschusshöhe h_1 , die Tell wählen muss, damit er bei einem Abschusswinkel $\alpha_0 = 4°$ zur Horizontalen, einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 70\frac{m}{s}$ und einem Abstand $a = 20m$ vom Sohn den Apfel (Höhe $h_2 = 1,50m$) genau trifft. (5 Punkte)
2. den Winkel α_1 sowie die Geschwindigkeit v_1 des Pfeils beim Auftreffen auf den Apfel. (5 Punkte)
3. die Geschwindigkeit v_2 mit der Apfel und Pfeil gemeinsam den Kopf des Sohns verlassen und den dabei auftretenden Winkel α_2. (3 Punkte)

Lösung

1. Für den Pfeil gilt die Wurfparabel, das heißt

$$x(t) = \cos\alpha_0 v_0 t \quad (1)$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin\alpha_0 v_0 t + h_1 \quad (2)$$

[2]

Die Flugzeit bis zum Apfel ergibt sich mit $x(t_1) = a$ zu

$$t_1 = \frac{a}{\cos\alpha_0 v_0} \quad (3)$$

[1]

Aus (2) folgt wegen $y(t_1) = h_2$

$$h_1 = h_2 + \frac{g}{2}t_1^2 - \sin\alpha_0 v_0 t_1 = h_2 + \frac{ga^2}{2\cos^2\alpha_0 v_0^2} - \tan\alpha_0 \cdot a = 0,504m \quad (4)$$

[2]

2. Es gilt

$$\dot{x}(t_1) = \cos\alpha_0 \cdot v_0 = \cos\alpha_1 \cdot v_1 \tag{5}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} v_0 \tag{6}$$

Zugleich ist

$$\dot{y}(t_1) = -g t_1 + \sin\alpha_0 \cdot v_0 = \sin\alpha_1 \cdot v_1 \tag{7}$$

[2]

Alternativ kann man auch vektoriell rechnen:

$$\vec{v_1}(t_1) = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha_0 \\ v_0 \sin\alpha_0 - \frac{ga}{v_0 \cos\alpha_0} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Division von (5) und (7) liefert mit (3)

$$\alpha_1 = \arctan\left(\tan\alpha_0 - \frac{ga}{\cos^2\alpha_0 v_0^2}\right) = 1,701° \tag{9}$$

$$\xrightarrow{(6)} v_1 = 69,86 \frac{m}{s} \tag{10}$$

[3]

3. Impulserhaltung für den inelastischen Stoß gibt:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \tag{11}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = 13,97 \frac{m}{s} \tag{12}$$

[2]

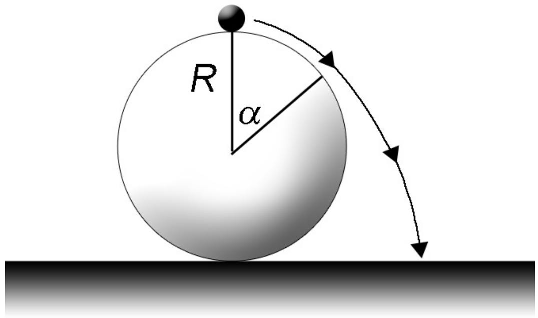
Des weiteren:

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 1,701° \tag{13}$$

[1]

2. Rutschende Kugel (7 Punkte)

Eine glatte Kugel liegt fest auf einer horizontalen Fläche. Ein Punktpartikel rutscht reibungsfrei die Kugel herunter, an deren höchstem Punkt startend. Es sei R der Radius der Kugel. Berechnen Sie den Winkel sowie die Geschwindigkeit mit denen das Partikel die Kugel verlässt und beschreiben Sie den Weg den das Partikel nach Verlassen der Kugel bis zum Boden nimmt.



Lösung

Wie in obiger Abbildung dargestellt, erhält man mit dem Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\alpha)$$

[1]

Die von der Kugel auf den Partikel ausgeübte radiale Kraft ist

$$F = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{R}$$

[1]

Wenn $F = 0$ ist, verlässt der Partikel die Kugeloberfläche. In diesem Moment gilt

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\alpha \tag{14}$$

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\alpha) \tag{15}$$

[2]

woraus folgt, dass

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = 48,2^\circ \tag{16}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \tag{17}$$

[2]

Der Partikel verlässt die Kugeloberfläche mit einer Geschwindigkeit von $v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$ mit einem Winkel von $\alpha = 48,2^\circ$, danach fällt der Partikel parabelförmig, bis er auf die Fläche trifft.

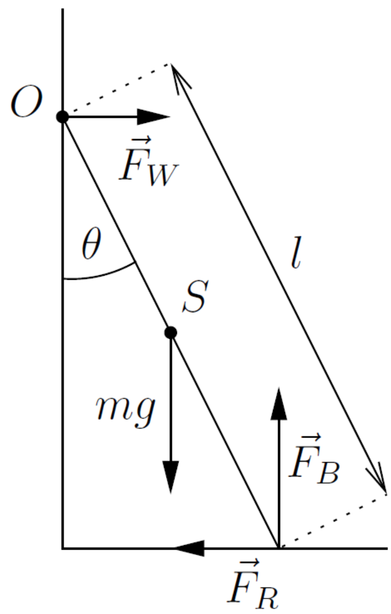
[1]

3. Rutschende Leiter (10 Punkte)

Eine Leiter der Länge l und der Masse m lehnt unter dem Winkel ϕ an einer glatten senkrechten Wand. Zwischen Wand und Leiter wirkt keine Reibung. Die Schwerkraft greift dabei im Schwerpunkt der Leiter an. Der Reibungskoeffizient zwischen Boden und Leiter ist μ. Erstellen Sie eine Skizze der Anordnung und zeichnen Sie die Kräfte ein. Wählen Sie als x - Richtung den Boden und als y - Richtung die Wand. Bestimmen Sie den Maximalwinkel θ_{max}, unter dem die Leiter an der Wand stehen bleibt, ohne zu rutschen.

Lösung:

Die Abbildung zeigt die Kräfte, die auf die Leiter wirken: Dies sind die Haltekraft des Bodens und der Wand, die Schwerkraft und die Reibungskraft:



[5]

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_W + \vec{F}_R = 0 \rightarrow \vec{F}_W = -\vec{F}_R \tag{18}$$

[1]

$$\sum \vec{F}_y = mg + \vec{F}_B = 0 \rightarrow \vec{F}_B = -mg \tag{19}$$

[1]

Auch die Drehmomente müssen verschwinden (d.h. $\sum \vec{M}_i = 0$), damit die Leiter in Ruhe bleibt. Drehmomente werden für den Ansatzpunkt O berechnet:

$$\underbrace{mg}_{\text{Schwerkraft}} \frac{l}{2}\sin(\theta) \underbrace{-mg}_{\vec{F}_B} l\sin(\theta) \underbrace{+\mu mg}_{\vec{F}_R} l\cos(\theta) = 0 \tag{20}$$

[1]

Damit ergibt sich

$$mg\frac{l}{2}\sin(\theta) = \mu mgl\cos(\theta) \tag{21}$$

[1]

und für θ:

$$\tan(\theta) = 2\mu \tag{22}$$

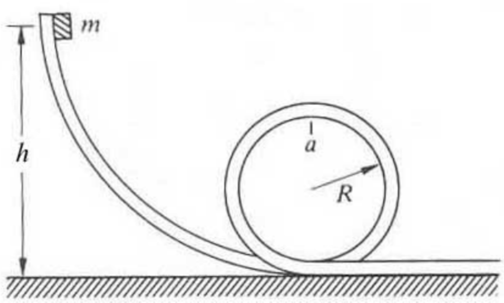
[1]

$$\theta = \arctan(2\mu) \tag{23}$$

[1]

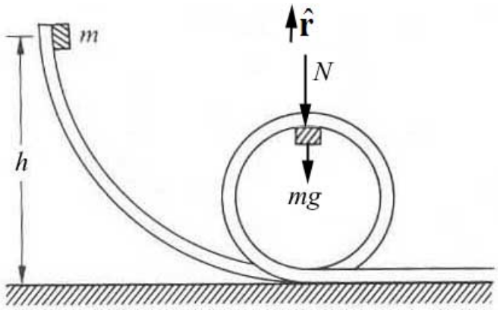
4. Loopingbahn (11 Punkte)

Ein umweltfreundlicher Achterbahnwagen mit Masse m rutscht aus der Ruhe in Höhe h los und durch einen Looping mit Radius R (siehe Abbildung). Die Bahn ist dabei reibungslos. Als sich der Wagen bei Punkt a am Höhepunkt des Loopings befindet, drückt er mit seiner dreifachen Gewichtskraft gegen die Bahn. Berechnen Sie von welcher Höhe h der Wagen gestartet ist.



Lösung:

Am einfachsten lässt sich die Aufgabe lösen, indem man Polarkoordinaten wählt, die ihren Ursprung im Mittelpunkt des Loopings haben. Die potentielle Energie wird so bestimmt, dass $E_{pot} = 0$ am Fuße des Loopings ist:



Der Anfangszustand herrscht in dem Moment, in dem der Wagen losfährt. Dann ist die kinetische Energie:

$$E_0^{kin} = 0 \tag{24}$$

[1]

und die potentielle Energie:

$$E_0^{pot} = mgh, \tag{25}$$

[1]

so dass für die Gesamtenergie gilt:

$$E_0^{ges} = E_0^{kin} + E_0^{pot} = mgh \tag{26}$$

Der Endzustand ist in dem Moment erreicht, in dem der Wagen den Höhepunkt des Loopings erreicht. Die kinetische Energie ist dort

$$E_f^{kin} = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{27}$$

[1]

und die potentielle Energie natürlich

$$E_f^{pot} = mg \cdot 2R \tag{28}$$

[1]

Dann ist die Gesamtenergie zu diesem Zeitpunkt gegeben durch:

$$E_f^{ges} = E_f^{kin} + E_f^{pot} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2R \tag{29}$$

Da die Bahn reibungslos ist, wird die Energie erhalten, so dass gilt:

$$\Delta E = E_f^{ges} - E_0^{ges} = 0 \tag{30}$$

[1]

d.h.

$$2mgR + \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh \tag{31}$$

[1]

Dies ist eine Gleichung mit den zwei Unbekannten v_f und h. Um h zu berechnen braucht man zusaätzlich noch die Bedingung, dass der Wagen am Höhepunkt des Loopings mit seiner dreifachen Gewichtskraft gegen die Bahn drückt. Damit ergibt sich aus Newtons 2. Axiom für die Radialrichtung $\vec{r}$:

$$-mg + N = -m\frac{v_f^2}{R} \tag{32}$$

[1]

wobei die Normalkraft gegeben ist durch

$$\vec{N} = -3mg\frac{\vec{r}}{|r|} \tag{33}$$

[1]

Und so wird Gleichung (32) zu

$$4mg = m\frac{v_f^2}{R} \tag{34}$$

$$\rightarrow 2mgR = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{35}$$

[1]

Nun haben wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$2mgR + \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh \tag{36}$$

$$2mgR = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{37}$$

Gleichung (37) kann nun in Gleichung (36) eingesetzt werden:

$$4mgR = mgh \tag{38}$$

[1]

Dann beträgt die anfängliche Höhe:

$$h = 4R \tag{39}$$

[1]

5. Neutronenstoß (9 Punkte)

Ein Neutron mit der Masse m_N und Impuls p_N stößt zentral und elastisch auf einen im Laborsystem ruhenden Deuterium-Kern der Masse $2m_N$.

1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Neutrons nach dem Stoß. (5 Punkte)
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Gesamtsystems. (2 Punkte)
3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Neutrons im Schwerpunktsystem vor und nach dem Stoß. (2 Punkte)

Lösung:

1. Gegeben sind m_N und p_N, damit auch $v_N = \frac{p_N}{m_N}$. Gesucht ist u_N.
   Mit dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$\frac{1}{2}m_N v_N^2 = \frac{1}{2}m_N u_N^2 + \frac{1}{2}2m_N u_0^2 \tag{40}$$

$$v_N^2 = u_N^2 + 2u_0^2 \tag{41}$$

[1]

Weiter gilt mit dem Impulserhaltungssatz (kann vektoriell gemacht werden, ist aber nicht notwendig):

$$m_N v_N = m_N u_N + 2m_N u_0 \tag{42}$$

$$v_N = u_N + 2v_0 \tag{43}$$

[1]

Weiter gilt:

$$v_N^2 = u_N^2 + 2u_0^2 = u_N^2 + \frac{1}{2}(v_N - u_N)^2 \tag{44}$$

$$v_N^2 - u_N^2 = \frac{1}{2}(v_N - u_N)^2 \tag{45}$$

[1]

$$(v_N + u_N)(v_N - u_N) = \frac{1}{2}(v_N - u_N)(v_N - u_N) \tag{46}$$

$$v_N + u_N = \frac{1}{2}(v_N - u_N) \tag{47}$$

[1]

$$v_N = -3u_N \tag{48}$$

$$u_N = \frac{1}{3}v_N \tag{49}$$

[1]

2.

$$(m_N + 2m_N)v_S = m_N v_N \tag{50}$$

[1]

$$v_S = \frac{v_N}{3} \tag{51}$$

[1]

3.

$$v_{N,S} = v_N - v_S = v_N - \frac{v_N}{3} = \frac{2}{3}v_N \tag{52}$$

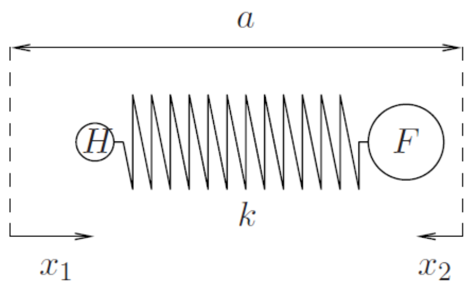
[1]

$$v_{N,S} = u_N - v_S = -\frac{1}{3}v_N - \frac{v_N}{3} = -\frac{2}{3}v_N \tag{53}$$

[1]

6. Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators (6 Punke)

Fluorwasserstoff ist ein 2-atomiges Molekül, das man sich in erster Näherung als zwei durch eine Feder gekoppelte Massenpunkte vorstellen kann, die entlang ihrer Verbindungslinie schwingen können (siehe Skizze).



Der Gleichgewichtsabstand der Atome beträgt $a = 92pm$, ihre Massen sind $m_H = 1.66 \cdot 10^{-27}kg$ bzw. $m_F = 31.5 \cdot 10^{-27}kg$. Durch spektroskopische Untersuchungen stellt man fest, dass die lineare Schwingungsfrequenz des Systems $f = 12.4 \cdot 10^{14}Hz$ beträgt. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_1 und x_2 der beiden punktförmig gedachten Atome aus ihren eingezeichneten Gleichgewichtslagen auf und berechnen Sie die Federkonstante D der HF-Bindung indem Sie die 'Relativkoordinate' $r = x_2 - x_1$ berechnen.

Lösung:

x_1 bezeichne die Auslenkung der Wasserstoffatoms aus seiner Gleichgewichtslage und x_2 die des Fluoratoms. Dann lauten die Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2:

$$m_1\ddot{x}_1 = -D(x_1 - x_2) \tag{54}$$

[1]

$$m_2\ddot{x}_2 = -D(x_2 - x_1) \tag{55}$$

[1]

Der Gleichgewichtsabstand a spielt keine Rolle, denn die Kräfte auf beide Atome sind null, wenn ihre Auslenkungen x_1 und x_2 null sind. Um die Bewegungsgleichung für die 'relative Auslenkung' $r = x_2 - x_1$ zu erhalten, subtrahiert man die Gleichungen:

$$\ddot{r} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{D}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{D}{m_1}(x_1 - x_2) \tag{56}$$

also

$$\ddot{r} = \left(-\frac{D}{m_1} - \frac{D}{m_2}\right)(x_2 - x_1) \tag{57}$$

bzw.

$$\ddot{r} = -\left(\frac{D}{m_1} + \frac{D}{m_2}\right) r \tag{58}$$

[3]

Daraus liest man die Frequenz der linearen Schwingungen ab:

$$\omega^2 = D\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = D\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\omega^2 \tag{59}$$

[1]

Mit den angegebenen Werten folgt

$$D = 95.7\frac{kN}{m} \tag{60}$$

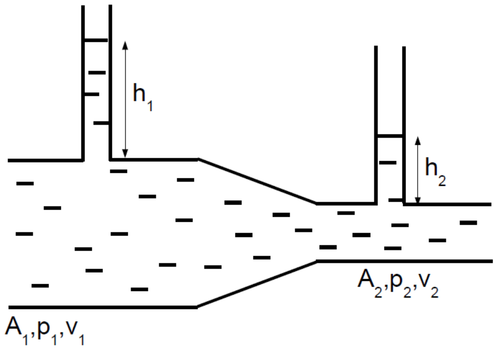
[1]

7. Hydrodynamik (10 Punkte)

Der Querschnitt eines Glasrohres, das von Wasser durchströmt wird, verjüngt sich von $A_1 = 4cm^2$ auf $A_2 = 1cm^2$. Vor und hinter der Verjüngung sind auf dem Rohr Steigröhrchen aufgesetzt. Im ersten Steigröhrchen steht der Wasserspielgel $h_1 = 15cm$ hoch.

1. Berechnen Sie wie hoch das Wasser im zweiten Steigröhrchen steht, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im engen Rohrteil $v_2 = 80\frac{m}{s}$ beträgt und die Viskosität von Wasser vernachlässigbar ist. (7 Punkte)

2. Berechen Sie mit welcher Geschwindigkeit das Wasser im engen Rohr fließen müsste, wenn die Steighöhe im ersten Röhrchen unverändert $h_1 = 1.5cm$, im zweiten jedoch $h_2 = 0cm$ betrüge. (3 Punkte)



Lösung:

1. Für eine horizontale Rohrströmung ist die Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{61}$$

[1]

Die statischen Drucke p_1 und p_2 sind gegeben durch:

$$p_1 = \rho g h_1 + p_A \quad , \quad p_2 = \rho g h_2 + p_A \tag{62}$$

[2]

wobei p_A der äußere Luftdruck ist.

Es gilt außerdem die Kontinuitätsgleichung, die besagt, dass der Volumenstrom konstant ist:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = const., \tag{63}$$

woraus für v_2 folgt:

$$v_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) v_2 \tag{64}$$

[1]

Setzt man diese Ergebnisse in die Bernoulli-Gleichung ein, so erhält man für h_2:

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{65}$$

$$\rightarrow \; h_2 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right) + h_1 = 11.9cm \tag{66}$$

[3]

2. Für h_2 wird Gleichung (66) zu

$$0 = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right) + h_1 \tag{67}$$

[1]

also ist

$$v_2 = \sqrt{\frac{-2gh_1}{\left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right)}} = 1.77\frac{m}{s} \tag{68}$$

[2]