Ferienkurs
Experimentalphysik I: Mechanik

Wintersemester 15/16

Übung 4 - Lösung

1 Seilwelle

Die Wellenfunktion einer harmonischen Welle auf einem Seil sei gegeben durch

$$y(x,t) = 0,001m\cos(62,8m^{-1}\ x + 314s^{-1}\ t)$$

1. In welche Richtung bewegt sich die Welle? Wie groß ist ihre Geschwindigkeit?
2. Ermitteln Sie Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsdauer der Welle.
3. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit eines Seilsegments?
4. Berechnen Sie die Spannung in einem 400 g schweren Seil der Länge 1 m.
   Hinweis: $v_{ph} = \sqrt{F/\mu}$, wobei μ die lineare Massendichte ist.

Lösung:

1. Die Welle bewegt sich nach links, da das Argument der Kosinus-Funktion

   $$kx + wt = k\left(x + \frac{w}{k}t\right)$$

   nach links wandert: Zur Zeit $t = 0$ ist sein Nullpunkt bei $x = 0$, zur Zeit $t > 0$ ist er bei $x = -w/k \cdot t < 0$. Aus dieser Gleichung erhält man die Geschwindigkeit

   $$v_{ph} = \frac{w}{k} = 5\ m/s$$

2. Für Wellenlänge λ, Frequenz f und Schwinungsdauer T erhält man

   $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,1\ m \qquad f = \frac{w}{2\pi} = 50\ Hz \qquad T = \frac{1}{f} = 0,02\ s$$

3. Wir setzen uns an einen festen Punkt, d.h. halten x konstant, und leiten nach t ab

   $$\dot{y}(x,t) = -Aw\sin(kx + wt)$$

   Die Amplitude der Geschwindigkeit des Seilelements am festgehaltenen Ort x ist also Aw (unabhängig von x) und hat den Wert $Aw = 0,314\ m/s$

4. Aus der Phasengeschwindigkeit der Welle

   $$v_{ph} = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m/l}} \tag{1}$$

   erhält man die Seilspannung

   $$F = \frac{w^2}{k^2}\frac{m}{l} = 10\ N$$

2 Schallwellen Schwebung

Eine Schallwelle der Frequenz $f_1 = 677Hz$ breitet sich in Luft mit der Schallgeschwindigkeit $c = 340\frac{m}{s}$ aus:

$$\xi_1 = \xi_m \cos\left(2\pi\left(f_1 t - \frac{x}{\lambda_1}\right)\right) \tag{2}$$

In gleicher Ausbreitungsrichtung überlagert sich ihr eine zweite Schallwelle mit geringfügig höherer Frequenz $f_2 = f_1 + \Delta f, \Delta f = 6,8Hz$, aber gleicher Amplitude:

$$\xi_2 = \xi_m \cos\left(2\pi\left(f_2 t - \frac{x}{\lambda_2}\right)\right) \tag{3}$$

1. Welche resultierende Wellenfunktion $\xi(t,x) = \xi_1 + \xi_2$ ergibt sich?
   (*Hinweis:* $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.)
2. Wie groß ist die Frequenz des sich aus der Überlagerung ergebenden Tons sowie die hörbare Periodendauer seines An- und Abschwellens? In welche Richtung breitet(en) sich die Welle(n) aus?

Lösung

Überlagerung zweier Schallwellen mit Ausbreitung in gleicher Richtung und unterschiedlicher Frequenz:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) \tag{4}$$

mit

$$\xi_1 = \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 t - \frac{x}{\lambda_1}\right)\right]$$
$$\xi_2 = \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_2 t - \frac{x}{\lambda_2}\right)\right]$$

1. $$\xi(x,t) = \xi_m \cos\left[2\pi f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] + \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 + \Delta f\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{5}$$

   mit $\lambda = \frac{c}{f}$ und $f_2 = f_1 + \Delta f$.

   Aus dem Additionstheorem folgt

   $$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 + \frac{\Delta f}{2}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[2\pi\frac{\Delta f}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{6}$$

   d.h. es resultiert eine Schwebung

2. Frequenz des sich aus der Überlagerung ergebenden Tons (schnelle Frequenz):

   $$f = f_1 + \frac{\Delta f}{2} = 680,4Hz \tag{7}$$

Periodendauer des An- und Abschwellens des Tons:

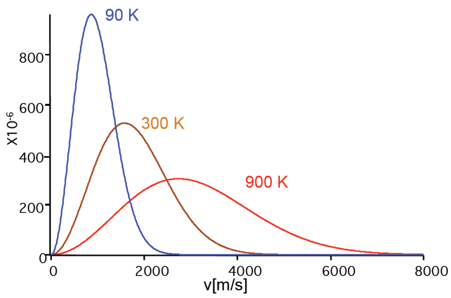
$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta f}{2}} = \frac{1}{\Delta f} = 0,15s \tag{8}$$

Die Wellen breiten sich beide nach rechts (in positive x-Richtung) aus, da ω und k in beiden Argumenten ein unterschiedliches Vorzeichen haben.

3 Maxwell-Boltzmann Verteilung

Die Formel der Maxwell-Boltzmann Verteilung lautet:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \tag{9}$$



1. Erklären Sie anschaulich, was die Funktion $f(v)$ für verschiedene Temperaturen beschreibt. Um welche Temperaturen handelt es sich im Graphen auf der Celsius-Skala?

Lösung:

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gibt an, wie wahrscheinlich ein Molekül eines idealen Gases bei einer gegebenen Temperatur die Geschwindigkeit v besitzt.

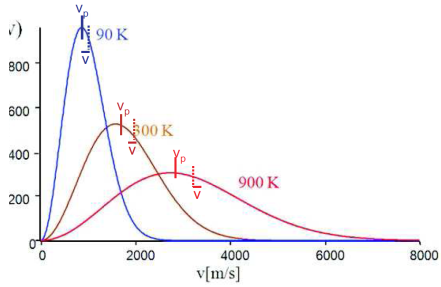
Ist die Temperatur klein, so besitzen die Moleküle mehrheitlich nur eine geringe (kinetische Energie) und damit eine geringere Geschwindigkeit. Für eine höhere Temperatur ist die kinetische Energie größer und damit auch die Geschwindigkeit der Moleküle. Deshalb ist hier die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Vergleich zur kleineren Temperatur nach rechts zu größeren Geschwindigkeiten verschoben.

Umrechnung der Temperaturen:

$$90\text{K} \equiv -183.15°\text{C} \tag{10}$$
$$300\text{K} \equiv 26.85°\text{C} \tag{11}$$
$$900\text{K} \equiv 626.85°\text{C} \tag{12}$$

2. Zeichnen Sie in den Graphen die ungefähre Lage der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit sowie der mittleren Geschwindigkeit für alle drei Temperaturen ein.

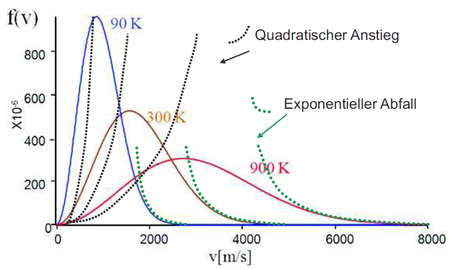
Lösung:



v_p ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit und entspricht der Geschwindigkeit, bei der $f(v)$ ein Maximum hat. $\bar{v}$, die mittlere Geschwindigkeit, entspricht der Geschwindigkeit, die sich ergibt, wenn man alle Geschwindigkeiten mit der Gewichtung $f(v)$ aufsummiert, d.h. $\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot f(v)dv$. In der Maxwell-Boltzmann Verteilung ist die mittlere Geschwindigkeit immer etwas höher als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit.

3. In welchem Geschwindigkeitsbereich dominiert der quadratische bzw. der exponentielle Teil in der Verteilung? Skizzieren Sie diese Bereiche im Graphen.

Lösung:



Für kleine Geschwindigkeiten dominiert der quadratische Term v^2, für große Geschwindigkeiten der exponentielle Term $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$.

4. Chemische Reaktionen (auch biologische Prozesse) laufen bei erhöhter Temperatur schneller ab. Können Sie dies mithilfe der Maxwell-Boltzmann Verteilung erklären?

Lösung:

Es können bei einer Reaktion nur die Moleküle reagieren, die eine so hohe Geschwindigkeit aufweisen, dass ihre kinetische Energie die notwendige Aktivierungsenergie der Reaktion übertrifft. Mit zunehmender Temperatur steigt dieser Anteil, da der relative Anteil der Moleküle, die eine gegebene Geschwindigkeit übersteigen, größer wird.

Außerdem legen schnellere Teilchen einen längeren Weg in der gleichen Zeit zurück, d.h. sie haben in der gleichen Zeit ein größeres Volumen mit potentiellen Stosspartner durchflogen.

Bei der Maxwell-Boltzmann-Verteilung in dieser Aufgabe übertreffen bei 90K praktisch keine, bei 300K nur wenige und bei 900K beträchtlich viele Moleküle die Geschwindigkeit von 4000m/s.

5. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines Wasserstoffmoleküls bei $T = 280\text{K}$, wie groß die eines Stickstoffmoleküls?

Lösung:

Aus der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung folgt

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{13}$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$. Zu beachten ist hierbei das dies die mittlere Geschwindigkeit ist und nicht die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat.

$$\sqrt{\langle v \rangle^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{14}$$

Für ein Wasserstoffmolekül der Masse $m = 3.32 \times 10^{-27}\text{kg}$ ergibt sich bei $T = 280\text{K}$:

$$\bar{v}_{H_2} = 1720\text{m/s} \tag{15}$$

und für ein Stickstoffmolekül der Masse $m = 46.5 \times 10^{-27}\text{kg}$

$$\bar{v}_{N_2} = 460 m/s \tag{16}$$

4 Barometrische Höhenformel (9 Punkte)

Ein Wetterballon hat prall gefüllt das Volument $V_{max} = 100\text{m}^3$. Ohne Gasfüllung beträgt die Masse des Ballons 20kg. Bei einer Temperatur von 20° und Normaldruck $p_0 = 1.013 \times 10^5\text{N/m}^2$ werden 2000 Mol H_2-Gas in den Ballon eingefüllt. Gasfüllung und Luft (vereinfachende Annahme: 100%N_2) werden als ideale Gase betrachtet. Zudem gelte für die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe h (gemessen in Meter) die barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{h}{8600}\right) \tag{17}$$

Hinweis: Die molare Masse von H_2 beträgt 2g/mol. Die molare Masse von N_2 beträgt 28g/mol.

1. Berechnen Sie die Dichte ρ_1 des Gases im Ballon am Erdboden.

Lösung:

Man wendet die ideale Gasgleichung für H_2

$$p_0 V_0 = nRT_0 \tag{18}$$

an, um das Volumen des Gases zu berechnen:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} \tag{19}$$

mit $n = 2000\text{mol}$, $R = 8.31\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$, $T_0 = 293.15\text{K}$ und $p_0 = 1.013 \times 10^5\text{Pa}$. Dann berechnent sich die Dichte mit

$$m_{H_2} = 2000\text{mol} \times 2\text{g/mol} = 4\text{kg} \tag{20}$$

zu

$$\rho = \frac{m}{V_0} = \frac{mp_0}{nRT_0} = 83.18\text{g/m}^3 \tag{21}$$

2. Welche Kraft F wird benötigt, um den Ballon am Erdboden zu halten?

Lösung:

Die Gewichtskraft F_{GH_2} des Gases und $F_{GBallon}$ des Ballons wirken nach unten gerichtet. Die Auftriebskraft F_{AH_2} wirkt nach oben gerichtet. Daher muss eine Kraft F aufgebracht werden, um den Ballon am Erdboden zu halten:

$$F = F_{AH_2} - F_{GH_2} - F_{GBallon} \tag{22}$$

Die Auftriebskraft ist bestimmt durch die Masse des verdrängten Gases N_2:

$$F_{AH2} = \rho_{N_2} V_0 g = 56\text{kg} \cdot g \tag{23}$$

Daher berechnet sich F zu:

$$F = 56\text{kg} \cdot g - 4\text{kg} \cdot g - 20\text{kg} \cdot g = 32\text{kg} \cdot g = 313.92\text{N} \tag{24}$$

3. In welcher Höhe h_x über dem Erdboden ist der Ballon erstmals prall gefüllt? Die Temperatur des Gases soll sich beim Aufstieg nicht ändern.

Lösung:

Da sich die Temperatur des Gases nicht ändert, ist

$$T = T_0 = const. \tag{25}$$

Der Ballon ist prall gefüllt bei einem Volumen von V_{max}.
Die allgemeine Gasgleichung besagt, dass

$$pV = nRT \tag{26}$$

Da $T = const.$ ist, gilt

$$p_0 V_0 = p(h) V_{max} \;\rightarrow\; p(h) = \frac{p_0 V_0}{V_{max}} \tag{27}$$

$p(h)$ ist außerdem durch die barometrische Höhenformel gegeben:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{h}{8600}\right) = \frac{p_0 V_0}{V_{max}} \tag{28}$$

Diese Gleichung kann nach h aufgelöst werden, um die Höhe zu bestimment:

$$h = -8600 \ln\left(\frac{V_0}{V_{max}}\right) = -8600 \ln\left(\frac{48.09\text{m}^3}{100\text{m}^3}\right) = 6296\text{m} \tag{29}$$

5 Trichterfluss

In einem Trichter wird die Höhe h=11.5cm einer idealen Flüssigkeit oberhalb der Trichteröffnung durch vorsichtiges Nachgießen konstant gehalten. Der Flüssigkeitsspiegel hat den Durchmesser d_1 =10cm, die Trichteröffnung den Durchmesser d_2 =6mm.

Hinweis: Verwenden Sie die Bernoulli-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung.

1. Mit welcher Geschwindigkeit strömt die Flüssigkeit aus dem Trichter?

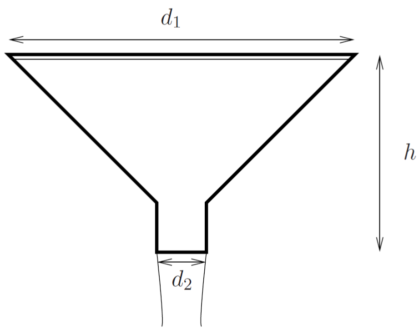
Lösung:

Es gilt die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \tag{30}$$

An der Oberfläche des Trichters herrscht Atmosphärendruck, also $p_1 = p_0$, ebenso im austretenden Wasserstrahl, also $p_2 = p_0$. Daher:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{31}$$



Weiterhin gilt die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{32}$$

also

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{33}$$

Zusammen mit der Bernoulli-Gleichung sind dies zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten v_1 und v_2. Elimination von v_1 ergibt:

$$v_2^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}} = \frac{2gh}{1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}} \tag{34}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert die Geschwindigkeit des Wasserstrahls:

$$v_2 = 1.5\text{m/s} \tag{35}$$

2. Welche Zeit ist erforderlich, um eine 1.0 l-Flasche mit Hilfe des Trichters zu füllen?

Lösung:

Aus der Austrittsgeschwindigkeit und der Querschnittsfläche der Austrittsöffnung ergibt sich der Volumenstrom

$$\Omega = A_2 v_2 \tag{36}$$

und die Zeit für das Auslaufen des Volumens V ist

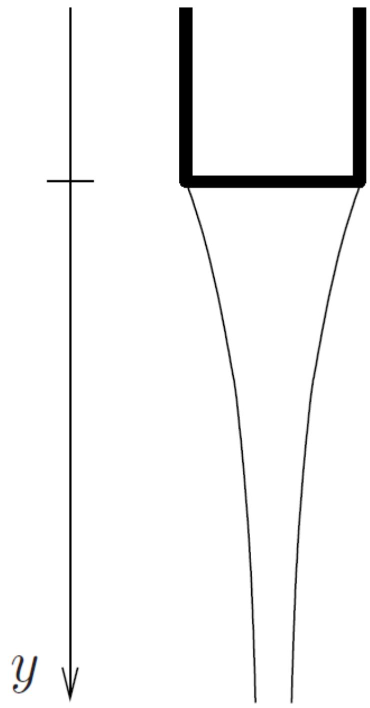
$$t = \frac{V}{\Omega} = \frac{V}{A_2 v_2} \tag{37}$$

also

$$t = 23.6\text{s} \tag{38}$$

3. Welchen Durchmesser hat der Flüssigkeitsstrahl in einer Tiefe von 24.0 cm unterhalb der Trichteröffnung?

Lösung:



Mit zunehmender Fallstrecke y nimmt die Fallgeschwindigkeit des Wassers zu. Wäre der Strahlquerschnitt konstant, dann würde daher der Volumenstrom des Wassers mit y zunehmen. Dies kann aber nicht sein, denn der Volumenstrom ist wegen der Inkompressibilität eine Erhaltungsgröße, d.h. unabhängig von y. Also muss der Strahlquerschnitt zum Ausgleich abnehmen.

Für den Volumentstrom $\Omega(y)$ gilt

$$\Omega(y) = A(y)v(y) = \text{const.} = A_2 v_2 \tag{39}$$

Die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v^2(y) - \rho g y = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{40}$$

(negatives Vorzeichen von $\rho g y$, da y nach unten zeigt.) Also

$$v(y) = \sqrt{v_2^2 + 2gy} \tag{41}$$

Damit wird die Stromerhaltung zu

$$A(y)\sqrt{v_2^2 + 2gy} = A_2 v_2 \tag{42}$$

bzw. mit $A = \pi d^2/4$

$$d^2(y)\sqrt{v_2^2 + 2gy} = d_2^2 v_2 \tag{43}$$

und schließlich

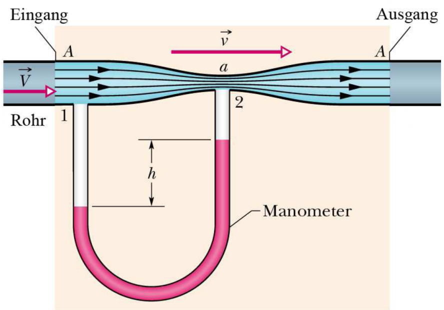
$$d(y) = d_2\sqrt{\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + 2gy}}} \tag{44}$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich für $y = 24.0\text{cm}$:

$$d(y) = 4.5\text{mm} \tag{45}$$

6 Venturidüse

Die Venturi-Düse wird oft zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Fluiden in einem Rohr verwendet (siehe Abbildung). Das Rohr habe am Eingang und Ausgang die Querschnittsfläche A. Am Eingang und Ausgang fließt das Fluid mit derselben Geschwindigkeit V wie im Rohr. Dazwischen strömt es mit der Geschwindigkeit v durch eine Verengung mit der Querschnittsfläche a. Das Manometer verbindet den breiteren Teil der Düse mit dem engeren Teil.



1. Was wird durch die Änderung des Fluiddrucks $\Delta p = p_2 - p_1$ bewirkt?

Lösung:

Die Veränderung des Fluiddrucks zwischen dem Druck in der Verengung am Punkt 2 und dem Druck im Rohr bei Punkt 1 erzeugt eine Höhendifferenz im Flüssigkeitsspiegel in den beiden Armen des Manometers.

2. Betrachten Sie die Druckdifferenz Δp zwischen Punkt 1 und Punkt 2 und zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit V gilt:

$$V = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}} \tag{46}$$

wobei ρ die Fluiddichte ist.

Lösung:

Man verwendet zuerst die Kontinuitätsgleichung

$$A \cdot V = a \cdot v \rightarrow v = \frac{A}{a} V \tag{47}$$

uns setzt dies dann in die Bernoulli-Gleichung ein:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{48}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2\left(\frac{a^2-A^2}{a^2}\right)=\Delta p \tag{49}$$

$$\rightarrow V=\sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(a^2-A^2)}} \tag{50}$$

3. Nehmen Sie nun an, bei dem Fluid handle es sich um Wasser mit der Dichte $\rho_W = 1\text{g/cm}^3$. Die Querschnittsflächen seien 5 cm^2 im Rohr und 4cm^2 in der Düsenverengung. Der Druck im Rohr sei 5.3 kPa und der Druck in der Verengung 3.3 kPa. Welche Wassermasse wird pro Sekunde durch den Rohreingang transportiert?

Lösung:

Mit der oben berechneten Geschwindigkeit und den angegeben Werten ergibt sich für V:

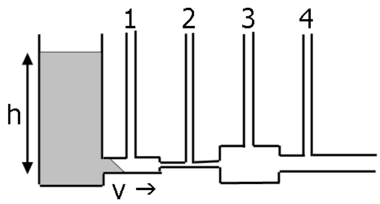
$$V=\frac{8}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{51}$$

Dann ist die Wassermasse pro Sekunde:

$$\frac{\Delta M_W}{\Delta t}=A\cdot V\cdot\rho_W=\frac{4}{3}\frac{\text{kg}}{\text{s}} \tag{52}$$

7 Bernoulli-Gleichung

Durch die Bernoulli-Gleichung $\rho gh+\frac{\rho}{2}v^2 = const.$ wird der Zusammenhang von hydrostatischem und hydrodynamischem Druck in einer stationären Strömung unter Vernachlässigung von Reibungsphänomenen beschrieben.



1. Der Wasserpegel des Vorratsbehälters (siehe Schema) sei $h = 40cm$ und das Gefäß so groß, dass der hydrostatische Druck in diesem zeitlich konstant bleibt. Das Wasser fließe unterhalb von Rohr 1 mit einer Geschwindigkeit von $v = 2\frac{m}{s}$ aus.

   Wie hoch ist der Wasserpegel in Rohr 1?

2. Beschreiben Sie auch qualitativ die Steighöhen in den übrigen Rohren (2-4) relativ zu Rohr 1, die Sie aus der Betrachtung der Bernoulli-Gleichung unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Rohrquerschnitte erhalten. Die Querschnitte $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$ verhalten sich wie $1 : 0,5 : 2 : 1$.

Lösung

1.

$$\begin{aligned}
p_0 &= \rho g h = 1\frac{g}{cm^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,4m = 4000Pa\\
p_1 &= \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}\cdot v_1^2 p_0\\
\Rightarrow & 1\frac{g}{cm^3}\cdot 10\frac{m}{s}\cdot h_1 + \frac{1g}{2cm^3}\cdot 4\frac{m^2}{s^2} = 4000Pa\\
\Rightarrow & 1\frac{g}{cm^3}\cdot 10\frac{m}{s}\cdot h_1 = 2000Pa \Rightarrow h_1 = 0,5\cdot h
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
A_2 &= 0,5\cdot A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow h_2 < h_1\\
A_3 &= 2\cdot A_1 \Rightarrow v_3 < v_1 \Rightarrow h_3 > h_1\\
A_4 &= A_1 \Rightarrow v_4 = v_1 \Rightarrow h_4 = h_1
\end{aligned}$$