Ferienkurs

Experimentalphysik I: Mechanik

Wintersemester 15/16

Übung 2 - Lösung

1 Kreisschleuder

Ein Stein der Masse $m = 0,2kg$ wird an einer $0,5m$ langen Schnur mit 2 Umdrehungen pro Sekunde in $h = 2m$ Höhe (Aufhängungspunkt) in einer horizontalen Kreisbahn herumgeschleudert. Die **Schwerkraft** ist zu vernachlässigen.

1. Wie groß ist die kinetische Energie des Steins?
2. Welche Kraft muss man aufbringen, um den Stein an der Schnur zu halten?
3. Bei welcher Umdrehungsfrequenz würde die Schnur reißen, wenn sie $100N$ aushält bevor sie reißt?
4. Wie weit würde er dann fliegen?
5. Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten vier Teilaufgaben bei Berücksichtigung der Schwerkraft?

Hinweis zu 5: Bestimmen Sie die Änderung des Radius der Kreisbahn.

Lösung

1. Es gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 && (1)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 && (2)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\frac{4\pi^2}{T^2} && (3)\\ &= \frac{2}{5}\pi^2\frac{kgm^2}{s^2} && (4)\\ &= 3,9J && (5)\end{aligned}$$

2. Es gilt für F_z die Kraft, die aufgebracht werden muss

$$\begin{aligned} F_z &= mr\omega^2 && (6)\\ &= \frac{8}{5}\pi^2\frac{kgm}{s^2} && (7)\\ &= 15,8N && (8)\end{aligned}$$

3. Es gilt für ν die Umdrehungsfrequenz, bei der die Schnur reißt

$$100N = mr\omega^2 = 4\pi mr\nu^2 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \nu = \sqrt{\frac{100N}{0,2kg\pi^2 0,5m}} = 5Hz \tag{10}$$

4. Da die Schwerkraft vernachlässigt ist, fliegt der Stein tangential weg und landet nicht auf dem Boden.

5. Die Kreisbahn ist immer noch in der Horizontalen, nur der Radius verringert sich, da die Schwerkraft $\vec{F}_g$ den Stein nach unten zieht: Die Schnur bildet einen Winkel α mit der Horizontalen. Der neue Radius der Kreisbahn r' ergibt sich aus den beiden Beziehungen im rechtwinkligen Kräftedreieck, denn damit gilt $\tan\alpha = \frac{F_g}{F_z}$ und $\cos\alpha = \frac{r'}{r}$. Es kann eingesetzt werden

$$\tan\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r'} = \frac{mg}{m\omega^2 r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{11}$$

was $\sin\alpha = \frac{g}{(\omega^2 r)}$ liefert. Damit gilt

$$\alpha = \arcsin\frac{g}{\omega^2 r} \tag{12}$$
$$= 7,1^\circ \tag{13}$$

Was ergibt, dass $r' = r\sqrt{1 - \frac{m^2g^2}{F_{Ges}^2}} = 0,49m$. Damit ist die kinetische Energie

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mr'^2\omega^2 \tag{14}$$
$$= \frac{1}{2}mr'^2\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{15}$$
$$= \frac{8}{5}(0,49)^2\pi^2 J \tag{16}$$
$$= 3,8J \tag{17}$$

Für 2 bestimmt man die resultierende Kraft $\vec{F}$ als

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_z \tag{18}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$
$$= m\begin{pmatrix} \omega^2 r \\ g \end{pmatrix} \tag{20}$$

Der Betrag der resultierenden Kraft liefert das Ergebnis

$$|\vec{F}| = m\sqrt{\omega^2 r^2 + g^2} = 15,8N \tag{21}$$

Die Umdrehungsfrequenz, bei der die Sehne reißt, kann man sich geometrisch überlegen

$$\frac{r'}{r} = \frac{F_Z}{F_{Ges}} = \frac{mr'\omega^2}{F_{Ges}} \Longrightarrow \omega_{mitSchwerkraft} = \sqrt{\frac{F_{Ges}}{mr}} = \omega_{ohneSchwerkraft} \tag{22}$$

Bei Reißen der Schnur wird der Stein tangential, das heißt horizontal, mit der Bahngeschwindigkeit v aus der Kreisbahn geworfen. Die Flugweite s ergibt sich hier einfach aus der horizontalen Bewegung mit v während der Fallzeit aus der Höhe h' (horizontaler Wurf):

$$h' = h - \delta h \tag{23}$$
$$= h - r\sin\alpha \tag{24}$$

Des weiteren gilt $h' = \frac{1}{2}gt^2$, also

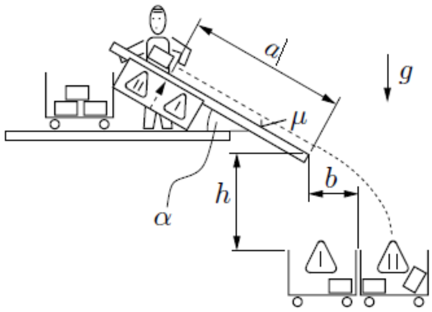
$$t = \sqrt{\frac{2(h - r\sin\alpha)}{g}} = 0,63s \tag{25}$$

Es gilt auch

$$s = v't = \omega r't = \omega r \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 g^2}{F_{Ges}^2}\right) \frac{2}{g} \left(h - r \frac{mg}{F_{Ges}}\right)} = 9,91m \tag{26}$$

2 Sortiermaschine

Betrachten Sie folgende Abbildung:



Dargestellt ist eine einfache Sortiermaschine, die Güter mit Hilfe einer reibungsbehafteten schiefen Ebene in erste und zweite Wahl aufteilt. Ein Arbeiter legt die Waren je nach Qualität oberhalb bzw. unterhalb der Markierung auf die Rampe. In welchem Abstand a zum Ende der Rampe muss die Markierung angebracht werden, damit die Ware erster Wahl, die oberhalb der Markierung auf die Rampe gelegt wird, im zweiten Auffangwagen landet?
Gegeben seien b, h, α, g, μ und die Masse m des Warenstücks.

Lösung:

Für die Bewegung eines Pakets bis zum Ende der Rutschbahn soll der Arbeitssatz benutzt werden (siehe Abbildung):

$$U_2 + T_2 - U_1 - T_1 = W_{12} \tag{27}$$

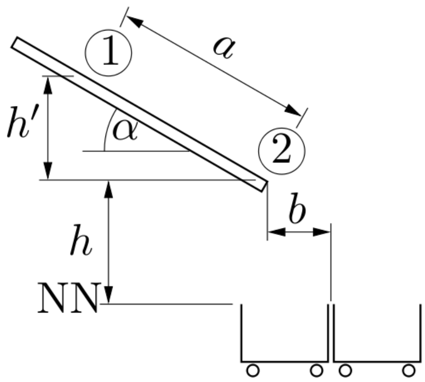
Zu Beginn gilt für die potentielle Energie U und die kinetische Energie T eines Warenstücks, das bei 1 aufgelegt wird:

$$U_1 = mg(h + h') = mg(h + a\sin(\alpha)) \tag{28}$$

und

$$T_1 = 0 \tag{29}$$

Am Ende der Rutsche bei 2:



$$U_2 = mgh \tag{30}$$

und

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{31}$$

Dazwischen leistet die Reibkraft die Arbeit:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -a\mu mg\cos(\alpha) \tag{32}$$

Setzt man die Werte für die Energien und die Arbeit in Gleichung (27) ein, so erhält man:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 - mg(h + a\sin(\alpha)) = -a\mu mg\cos(\alpha) \tag{33}$$

Nach der Geschwindigkeit v aufgelöst ergibt sich für diese:

$$v^2 = (a\mu g\cos(\alpha) + g(h + a\sin(\alpha) - gh) \cdot 2 \tag{34}$$

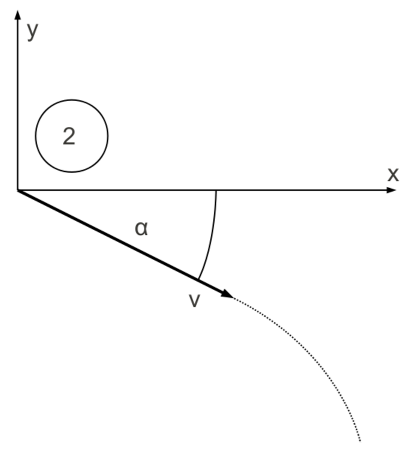
und damit

$$v = \sqrt{2ga(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))} \tag{35}$$

Ab 2 erfolgt ein 'schiefer Wurf' mit der Anfangsgeschwindigkeit v nach dem 2. Newtonschen Gesetz (siehe Abbildung):

Auf das Paket wirkt dann die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{36}$$



und seine Bahn wird durch $\vec{r}(t)$ beschrieben:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t \end{pmatrix} \tag{37}$$

v_x und v_y werden von der Anfangsgeschwindigkeit v bestimmt, so dass:

$$v_x = v\cos(\alpha) \ \ , \ \ v_y = -v\sin(\alpha) \tag{38}$$

Somit ist $\vec{r}(t)$ gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v\cos(\alpha)t \\ -\frac{1}{2}gt^2 - v\sin(\alpha)t \end{pmatrix} \tag{39}$$

Nun muss eine Beziehung zwischen der gesuchten Länge a und dem gegebenen Abstand b (siehe Abbildung) herzustellen, wird angenommen, dass b zum folgenden Endzeitpunkt t_e erreicht wird:

$$x(t_e) \equiv b = v\cos(\alpha)t_e \rightarrow t_e = \frac{b}{v\cos(\alpha)} \tag{40}$$

Dieser Wert für t_e wird nun in Gleichung (39) eingesetzt. So erhält man einen Wert für die Geschwindigkeit v:

$$y(t_e) \equiv -h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{b}{v\cos(\alpha)}\right)^2 - \frac{vb\sin(\alpha)}{v\cos(\alpha)} \tag{41}$$

Diese Gleichung wird nach v^2 aufgelöst:

$$v^2 = \frac{b^2 g}{2(h - b\tan(\alpha))\cos^2(\alpha)} \tag{42}$$

Gleichsetzung mit der Gleichung (35) ergibt dann

$$2ga(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) = \frac{b^2 g}{2(h - b\tan(\alpha))\cos^2(\alpha)} \tag{43}$$

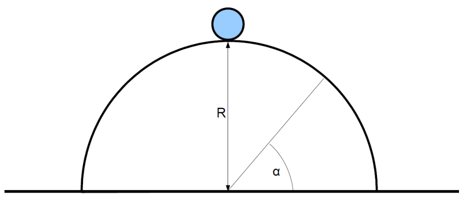
Und daraus folgt nun der Gesuchte Wert für a:

$$a = \frac{b^2}{4\cos^2(\alpha)(h - b\tan(\alpha))(sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))} \tag{44}$$

a ist die gesuchte Position der Markierung. Legt man das Warenstück nun genau bei a auf, wird es genau zwischen den beiden Auffangwagen landen. Wird es weiter oben aufgelegt, fliegt es weiter, also in den zweiten Wagen. Das sieht man auch in Gleichung (44): Bei einer Vergrößerung von a wird sich auch b vergrößern.

3 Energieerhaltung: Potentielle und kinetische Energie

Ein punktförmiger Körper der Masse $m = 100$kg liegt oben auf einer Halbkugel mit Radius $R = 10$m. Der Körper gerät aus der Gleichgewichtslage und gleitet reibungsfrei auf der Halbkugeloberlfäche hinunter.



1. Wie hängt die kinetische Energie vom Winkel α ab, solange der Körper in Kontakt mit der Halbkugel ist?

Lösung:

Um die kinetische Energie als Funktion des Winkels α zu berechnen, verwendet man die Energieerhaltung:

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = const. \tag{45}$$

Die Gesamtenergie ist gegeben durch die potentielle Energie auf dem Höhepunkt der Halbkugel, da hier die kinetische Energie Null ist, d.h. die Kugel ruht:

$$E_{ges} = mgR \tag{46}$$

während die potentielle und kinetische Energie gegeben sind durch

$$E_{pot} = mgh \quad , \quad E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{47}$$

so dass

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = mg(R - h) \tag{48}$$

Aus einfachen geometrischen Überlegungen lässt sich h als $h = R\sin(\alpha)$ schreiben. Somit erhält man schließlich

$$E_{kin}(\alpha) = mgR(1 - \sin(\alpha)) \tag{49}$$

2. Welche Kräfte - tangential und radial zur Halbkugel - wirken auf den Körper? Wie hängen diese Kräfte von α ab?

Lösung:

Es wirkt nur die Gravitationskraft:

$$\vec{F}_g = -mg\mathbf{e}_y = \vec{F}_{g_{rad}} + \vec{F}_{g_{tan}} \tag{50}$$

Die radiale Komponente stellt die Zentripetalkraft dar, die tangentiale Komponente beschleunigt den Körper:

$$F_{tan} = mg\cos(\alpha) \tag{51}$$

$$F_{rad} = mg\sin(\alpha) \tag{52}$$

3. Berechnen Sie den Winkel α_K, bei dem der Kontakt zur Halbkugel verloren geht.

Lösung:

Bei Kontaktverlust ist die Radialbeschleunigung genau gleich der Zentripetalbeschleunigung:

$$F_Z = F_{rad} \tag{53}$$

Also:

$$m\omega^2 R = mg\sin(\alpha_K) \tag{54}$$

Hier kann die Winkelgeschwindigkeit geschrieben werden als

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{55}$$

Aus Teilaufgabe a) ist außerdem bekannt, dass

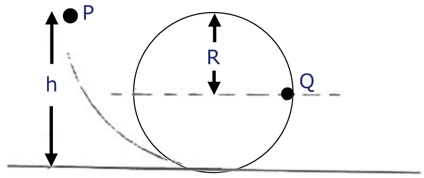
$$v^2 = 2gR(1 - \sin(\alpha_K)) \tag{56}$$

In Gleichung (54) eingesetzt und nach α_K aufgelöst ergibt sich daher:

$$\frac{1}{R} 2gR\sin(\alpha_K) = g\sin(\alpha_K) \tag{57}$$

$$\sin(\alpha_K) = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \alpha_K = 41.8^\circ \tag{58}$$

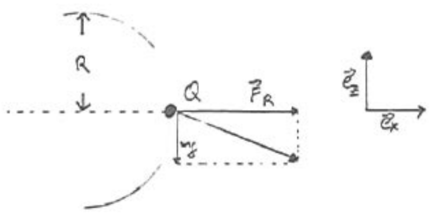
4 Energieerhaltung 3



Eine kleine Masse m rutscht reibungslos eine Bahn herunter. Danach durchfährt die Masse den Todeskreis (Looping). Der Todeskreis habe den Radius R. Die Masse wird immer so geführt, dass sie nicht seitlich aus der Bahn fallen kann.

1. Wenn die Masse von der Höhe $5R$ im Punkt P auf der Bahn losgelassen wird, wie groß ist dann der Betrag der der **resultierenden Kraft** auf die Masse im Punkt Q? Geben Sie diese Kraft in Einheiten der Gravitationskraft an und zeichnen Sie die Kräfte in eine **Skizze** ein.
2. Wie groß ist die Kreisfrequenz ω der Masse m im Punkt Q.
3. Bei welcher Höhe sollte die Masse losgelassen werden, damit sie am höchsten Punkt des Loopings gerade nicht herunterfällt?

Lösung



1. Die Geschwindigkeit kann mithilfe des Energiesatz bestimmt werden.

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + mgR$$

Für $h = 5R$ ergibt sich

$$mg4R = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{8gR}$$

Die Fliehkraft $\vec{F}_\mathrm{R}$ entspricht $m\frac{v^2}{R}\vec{e}_x = m8g\vec{e}_x$, die Schwerkraft $\vec{F}_\mathrm{G} = -mg\vec{e}_z$. Damit gilt

$$F_\mathrm{ges}^2 = F_\mathrm{R}^2 + F_\mathrm{G}^2 = m^2g^2(8^2+1) = 65m^2g^2 \Rightarrow F_\mathrm{ges} = \sqrt{65}mg$$

2. Es ergibt sich $\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{8gR}}{R} = \sqrt{\frac{8g}{R}}$.

3. Der Energiesatz am höchsten Punkt liefert

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + mg2R$$

Nun, $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{R} \Leftrightarrow mg = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v^2 = gR$ benutzend

$$= \frac{m}{2}gR + mg2R,$$

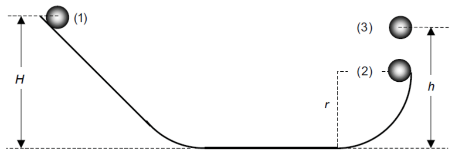
was

$$h = \frac{5}{2}R$$

liefert.

5 Halblooping

Eine Kugel (Masse m, Trägheitsmoment J bzgl. ihres Mittelpunktes, Radius R) rollt aus der Ruhe heraus ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinab um danach über einen Viertelkreis mit dem Radius r die Bahn in vertikaler Richtung zu verlassen. (Siehe Skizze)



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Kugel beim Verlassen des Viertelkreises, also an der Stelle (2).

2. Welche Höhe h erreicht die Kugel nach Verlassen des Viertelkreises bezogen auf den Erdboden, also Stelle (3).

   Warum erreicht die Kugel nicht mehr die Ausgangshöhe H? Begründen Sie dies anhand ihrer Rechnungen aus 1 und dieser Teilaufgabe.

Lösung

1. Beim Rollen ohne zu gleiten gilt folgender Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω bei der Rotation um den Schwerpunkt und der Translationsgeschwindigkeit v des Schwerpunkts der Kugel.
$$\omega = \frac{v}{R} \tag{59}$$
Der Energieerhaltungssatz zwischen (1) und (2) liefert
$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{60}$$
Die Rollbedingung 59 eingesetzt ergibt
$$\begin{aligned} mgH &= mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2 \\ 2g(H-r) &= \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2g(H-r)}{1+\frac{J}{mR^2}}} \end{aligned}$$
2. Der Energieerhaltungssatz zwischen (2) und (3) ergibt
$$mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{61}$$
Hierbei ist zu bemerken: Beim Verlassen des Viertelkreises (2) wird die Rotation permanent aufrecht erhalten, d. h. auch im höchsten Punkt (3) rotiert die Kugel noch mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω, wie bei (2).
Damit ergibt sich
$$mgh = mgr + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow h = r + \frac{v^2}{2g} \tag{62}$$
Mit Aufgabenteil 1 lässt sich folgende Aussage über H machen:
$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{J}{R^2}v^2 \Rightarrow H = \underbrace{r + \frac{v^2}{2g}}_{=h} + \underbrace{\frac{J}{mR^2}\cdot\frac{v^2}{2g}}_{>0}$$
Damit erkennt man, dass $h < H$ gilt.

6 Leistung und elektrische Energie

Ein kleiner Damm produziert elektrische Energie. Das Wasser fällt aus einer Höhe von 27m um eine Turbine anzutreiben. Wenn die Effizienz, mit der elektrische Energie produziert wird, nur 65% beträgt, wieviel Wasser muss dann über den Damm fließen, damit er 780kW Leistung erbringt? Dieses Kraftwerk kostet 3.2Mio. Euro. Wie viele Jahre dauert es, bis sich das Kraftwerk finanziell lohnt, angenommen, Strom kostet 8Cent/kWh?

Lösung:

Um die benötigte Leistung für die elektrische Energie aufzubringen, muss das Kraftwerk

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = \frac{780\text{kW}}{0.65} = 1200\text{kW} \tag{63}$$

produzieren.

Daher muss pro Sekunde 1.2×10^6J Energie gewonnen werden. Dies geschieht durch die Umwandlung von potentieller Energie:

$$E = mgh \;\rightarrow\; m = \frac{E}{gh} = \frac{1.2 \times 10^6\text{J}}{9.81\text{m/s}^2 \times 27\text{m}} = 4500\text{kg} \tag{64}$$

Also müssen 4500 Liter Wasser pro Sekunde über den Damm fließen, um die nötige Energie zu produzieren.

Das Kraftwerk produziert 780kW, d.h. 7.8×10^5J pro Sekunde, also pro Jahr

$$780000\text{J} \times (60 \times 60 \times 24 \times 365) = 2.46 \times 10^{13}\text{J} \tag{65}$$

Damit sich das Kraftwerk finanziell lohnt, müssen insgesamt

$$\frac{3.2 \times 10^6\text{Euro}}{0.08\text{Euro/kWh}} = 4 \times 10^7\text{kWh} = 1.44 \times 10^{14}\text{J} \tag{66}$$

produziert werden. Bei der gegebenen Jahresproduktion entspricht dieser einer Laufzeit von 5.9Jahren.

7 Feder auf schiefer Ebene

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 20°$ befindet sich ein Körper der Masse $m = 1kg$. Der Körper hängt an einer Feder der Federkonstanten k, die an der (festen) Spitze der schiefen Ebene befestigt ist.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.
2. Welche Federstärke k muss die Feder besitzen, damit die Masse mit einer Frequenz $f = 10Hz$ schwingt?
3. Welchen Einfluss hat der Neigungswinkel α auf das System?

Lösung:

1. Wählen wir die positive x-Richtung so, dass sie die schiefe Ebene herab zeigt, so ergibt sich bei einer Auslenkung der Feder um x aus der Ruhelage x_0 für die resultierende Kraft $F = F_{Hang} - F_{Feder}$, also

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - kx \\ \Rightarrow \ddot{x} + w^2 x &= g\sin\alpha \end{aligned}$$

   wobei $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung! Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_{hom}(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt)$$

   Da die Inhomogenität nur eine Konstante ist, wählen wir als partikulären Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_{part}(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_{part}(t) = \frac{g\sin\alpha}{w^2} = x_0$$

   Die allgemeine Lösung ist somit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{hom}(t) + x_{part}(t) \\ &= A\sin(wt) + B\cos(wt) + \frac{g\sin\alpha}{w^2} \end{aligned}$$

   Mit den Nebenbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man für die Koeffizienten

$$A = \frac{v_0}{w} \qquad B = 0$$

   und somit die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{w}\sin(wt) + x_0$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} w^2 &= (2\pi f)^2 = D/m \\ \Rightarrow D &= m(2\pi f)^2 = 4\ kN/m \end{aligned}$$

3. Die Eigenfrequenz w hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage x_0 allerdings schon.

8 Palme im Wind

Eine hohe Palme mit einer 1 Tonne schweren, kompakten Krone bewegt sich im Wind. Für ein paar Minuten übt ein konstanter Wind eine horizontale Kraft von $1000N$ auf die Krone aus. Diese wird dadurch um $4m$ zur Seite ausgelenkt. Bei plötzlich eintretender Windstille führt die Krone eine gedämpfte harmonische Schwingung aus. Dabei ist die Maximalamplitude der ersten Schwingung $4m$, die der zweiten $3m$ und die der dritten $2,25m$.

1. Bestimmen Sie die Dämpfungskoeffizient der Schwingung.
2. Welchen Wert hat die Dämpfungsfrequenz der Schwingung?

Lösung:

1. Die Palme wird durch eine Kraft von $F = 1000N$ um $x = 4m$ ausgelenkt. Damit ergibt sich eine Federkonstante k der Palme von

$$k = \frac{F}{x} = 250\frac{N}{m}$$

Für die Kreisfrequenz w_0 der ungedämpften Schwingung gilt

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,5Hz$$

Mit der Definition des logarithmischen Dekrements findet man einen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskoeffizient δ, der Periodendauer T und den angegeben Maximalamplituden. Es ergibt sich

$$\delta T = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{4}{3}$$

Aus der Vorlesung ist für den Fall der gedämpften Schwingung die Dämpfungseigenfrequenz bekannt.

$$w_d^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right) = w_0^2 - \delta^2$$

Für die Periodendauer gilt somit

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\delta T)^2}{w_0^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\ln 4/3)^2}{w_0^2}} = 12,6s$$

Für die Dämpfungskoeffizient erhält man damit

$$\delta = \frac{\ln 4/3}{T} = 0,023s^{-1}$$

2. Für die Kreisfrequenz folgt dann

$$w_d = \frac{2\pi}{T} = 0,499Hz$$