Ferienkurs

Experimentalphysik I: Mechanik

Wintersemester 15/16

Übung 1 - Lösung

1 Stein fällt in Brunnen

Ein Stein fällt in einen Brunnen. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Ein Zeitintervall $\Delta t = 1s$ nach dem Beginn des freien Falls wird eine zweiter Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v'_{z0} = 20\frac{m}{s}$ hinterhergeworfen. Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt. ($g = 10\frac{m}{s^2}$)

1. Berechnen Sie die Zeit t_1, die nach Bewegungsbeginn des ersten Steines vergeht, bis dieser vom zweiten Stein überholt wird.
2. In welcher Tiefe z_1 findet der Überholvorgang statt?

Lösung:

1. Beide Steine führen eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung nach unten (in positive z-Richtung) aus. Die Ort-Zeit-Funktion lautet für den ersten Stein:

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

Für den zweiten Stein gilt

$$z' = \frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2 + v'_{z0}(t-\Delta t) \tag{2}$$

wobei der spätere Start dadurch berücksichtigt ist, dass $\Delta t > 0$ von der Zeit abgezogen wurde. Beim Überholvorgang, der zur Zeit t_1 stattfindet, sind beide Steine am gleichen Ort: $z_1 = z'_1$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g(t_1-\Delta t)^2 + v'_{z0}(t_1-\Delta t) \tag{3}$$

Diese Gleichung muss nun nach t_1 aufgelöst werden.

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2 - gt_1\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 + v'_{z0}t_1 - v'_{z0}\Delta t \tag{4}$$

$$t_1 \cdot (v'_{z0} - g\Delta t) = (v'_{z0} - \frac{1}{2}g\Delta t)\cdot\Delta t \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{v'_{z0} - \frac{1}{2}g\Delta t}{v'_{z0} - g\Delta t}\cdot\Delta t = 1,5s \tag{6}$$

Das Problem ist nur sinnvoll lösbar, wenn $v'_{z0} > g\Delta t$, d. h., die Startgeschwindigkeit des zweiten Steins muss größer sein als die Geschwindigkeit, die der erste Stein bis dahin erreicht hat.

2. $z_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 11m$

2 Fliegender Pfeil

Sie schießen vom Boden aus einen Pfeil in einem Winkel α zur Horizontalen mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 60\ m/s$ ab.

1. Wie weit und wie hoch fliegt der Pfeil, falls Sie ihn unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ abschießen?
2. Unter welchem Winkel α_1 müssen Sie den Pfeil abschießen, damit seine Reichweite maximal wird? Wie weit fliegt er?
3. Unter welchem Winkel α_2 müssen Sie den Pfeil abschießen, damit seine vertikale Auftreffgeschwindigkeit maximal wird? Wie hoch fliegt er?

Lösung

Es gilt die allgemeine Bewegungsgleichung

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$
$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

mit $x_0 = y_0 = 0$, $v_x = v_0 \cos(\alpha)$, $v_y = v_0 \sin(\alpha)$, $a_y = -g$ und $a_x = 0$ erhält man die speziellen Bewegungsgleichungen

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$$
$$y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

1. **Reichweite**: Der Pfeil treffe zur Zeit t_1 auf dem Boden auf. Dann gilt

$$y(t_1) = 0$$
$$\Rightarrow (v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1)\, t_1 = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $x(t)$ ein erhält man die Reichweite

$$x(t_1) = \frac{2 v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} =: x_{max}(\alpha)$$

und damit $x_{max}(30°) = 1247,2m$ **Höhe**: Der Pfeil sei zur Zeit t_2 am höchsten Punkt. Dann gilt

$$\dot{y}(t_2) = 0$$
$$\Rightarrow v_0 \sin(\alpha) - g t_2 = 0$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Setzt man dies nun in $y(t)$ ein erhält man die Höhe

$$y(t_2) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} =: y_{max}(\alpha)$$

und damit $y_{max}(30°) = 45,0m$

2. Um die Reichweite zu maximieren muss man die Gleichung für x_{max} ableiten

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_{max}(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1)) = 0 \\
&\Rightarrow \tan^2(\alpha_1) = 1 \\
&\Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ
\end{aligned}$$

   und die Reichweite aus $x_{max}(\alpha_1) = 1440m$

3. Die maximale vertikale Auftreffgeschwindigkeit erhält man natürlich bei einem Abschusswinkel von $\alpha_2 = 90^\circ$ (da $v_x = \text{const.}$). Man erhält damit für die Höhe $y_{max}(\alpha_2) = 180m$

3 Ellipsenbahn

Betrachten Sie ein Punktteilchen, dessen Bahn durch $\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t)e_x + B\sin(\omega t)e_y$ mit $A > B > 0$ gegeben ist.

1. Um was für eine Bewegung handelt es sich hierbei?
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ des Teilchens.
3. Wo ist der Betrag der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung maximal, wo minimal?
4. Können Sie einen einfachen Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Teilchens und seinem Ort erkennen? Formulieren Sie diesen Zusammenhang als Gleichung sowie als vollständigen Satz, der die Begriffe "Richtung der Beschleunigung" und "Betrag der Beschleunigung" enthält.

Lösung

1. Es handelt sich um eine Bewegung auf einer elliptischen Bahn mit Mittelpunkt im Ursprung und großer Halbachse A entlang der x-Richtung und kleiner Halbachse B entlang der y-Richtung. Für A = B entartet die Ellipse zu einem Kreis; diesen Fall haben wir aber ausgeschlossen.

2. Die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}A\cos(\omega t)e_x + B\sin(\omega t)e_y = \\
-\omega A\sin(\omega t)e_x + \omega B\cos(\omega t)e_y
\end{aligned}$$

   Die Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t)e_x - \omega^2 B\sin(\omega t)e_y$$

3. Es bietet sich an, nicht mit den Beträgen von Geschwindigkeit und Beschleunigung direkt zu rechnen, sondern mit ihren Quadraten, da man sich so die hässlichen Wurzeln spart. Das ist erlaubt, da die Beträge genau dort maximal/minimal sind, wo ihre Quadrate maximal/minimal sind.
   Aus 4.2) folgt für das Betragsquadrat:

$$|v|^2 = \sqrt{v^2}^2 = v^2(t) = \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 B^2 \cos^2(\omega t)$$

   $v^2(t)$ hat dort ein Extrem, wo die Zeitableitung verschwindet:

$$\frac{d}{dt}v^2(t) = 2\omega^3 A^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t) - 2\omega^3 B^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t) \stackrel{!}{=} 0$$

   Also:

$$(A^2 - B^2)\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

   Dies ist erfüllt, wenn entweder der sin oder der cos null ist, also wenn $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, also genau in den 4 Punkten der Ellipse, wo auch der Abstand vom Ursprung extremal wird. Die Werte von v sind in diesen Punkten:

$$\begin{aligned} \omega t &= 0 \rightarrow v = \omega B \\ \omega t &= \frac{\pi}{2} \rightarrow v = \omega A \\ \omega t &= \pi \rightarrow v = \omega B \\ \omega t &= \frac{3\pi}{2} \rightarrow v = \omega A \end{aligned}$$

   Wegen der Voraussetzung A > B erkennt man, dass die Geschwindigkeit dort maximal ist, wo der Abstand zum Mittelpunkt minimal ist und umgekehrt.

   Die Rechnung für die Beschleunigung erfolgt analog:

$$a^2(t) = \omega^4 A^2 \cos^2(\omega t) + \omega^4 B^2 \sin^2(\omega t)$$

   $a^2(t)$ wird extremal, wenn seine Zeitableitung verschwindet:

$$\frac{d}{dt}a^2(t) = -2\omega^5 A^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t) + 2\omega^5 B^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t) \stackrel{!}{=} 0$$

   Also

$$(A^2 - B^2)\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

   Dies ist erfüllt, wenn entweder der sin oder der cos null ist, also wenn $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, also genau in den 4 Punkten der Ellipse, wo auch der Abstand vom Ursprung extremal wird. Die Werte von a sind in diesen Punkten:

$$\begin{aligned} \omega t &= 0 \rightarrow a = \omega^2 A \\ \omega t &= \frac{\pi}{2} \rightarrow a = \omega^2 B \end{aligned}$$

$$\omega t = \pi \rightarrow a = \omega^2 A$$
$$\omega t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow a = \omega^2 B$$

Wegen der Voraussetzung A > B erkennt man, dass die Beschleunigung dort maximal ist, wo der Abstand zum Mittelpunkt maximal ist und umgekehrt.

4. Betrachtet man die in b) berechnete Beschleunigung zur Zeit t

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t)e_x - \omega^2 B\sin(\omega t)e_y$$

und vergleicht diese mit dem Ort zur selben Zeit t:

$$\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t)e_x + B\sin(\omega t)e_y,$$

dann erkennt man den einfachen Zusammenhang:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

Auf der betrachteten Ellipsenbahn zeigt die Richtung der Beschleunigung also stets entgegen dem momentanen Ortsvektor, also auf den Ursprung hin, während der Betrag der Beschleunigung proportional zur Länge des Ortsvektors, also zum Abstand vom Ursprung ist.

4 Gravitationskraft

Betrachten Sie eine Bleikugel der Masse $1000kg$, die in der Mitte eines großen und im wesentlichen leeren Labors feststehend fixiert ist. In $1m$ Abstand (Abstand der Mittelpunkte) befindet sich eine zweite Bleikugel der Masse $0,1kg$, die sich entlang der horizontalen Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kugeln reibungsfrei bewegen kann. Würden im Labor ideale Bedingungen herrschen, dann würde man beobachten, dass eine halbe Stunde nachdem die kleine Kugel aus der Ruhe losgelassen wurde, sie sich der großen Kugel aufgrund ihrer Gravitationsanziehung um $10,8cm$ genähert hat.

1. Bestimmen Sie aus diesen Angaben den Wert der Newtonschen Gravitationskonstanten G. Nehmen Sie dazu näherungsweise an, dass auf dem gesamten Weg der kleinen Kugel dieselbe Kraft wirkt wie am Anfangspunkt.

2. Bestimmen Sie die Masse und die mittlere Dichte der Erde. (Der Erdradius ist $6378km$ und die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche $9.81\frac{m}{s^2}$)

Lösung

Die Gravitationskraft ist allgemein definiert als

$$\vec{F}_G = G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

1. Die Kugel mit Masse m wird durch die Gravitationskraft F_G beschleunigt, also gilt für die Beschleunigung a

$$a = \frac{F_G}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Diese Beschleunigung führt nach einer Zeit von $t = 1800s$ zu einer zurückgelegten Strecke von

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0,108m$$

wir erhalten also für die Gravitationskonstante mit einem Abstand von $r = 1m$ und $M = 1000kg$

$$G = \frac{ar^2}{M} = \frac{2sr^2}{t^2M} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{s^2kg}$$

2. Aus der Gravitationsbeschleunigung auf der Erde

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2}$$

lässt sich mit der berechneten Gravitationskonstante aus a) und dem Erdradius $R_E = 6378km$ die Erdmasse berechnen

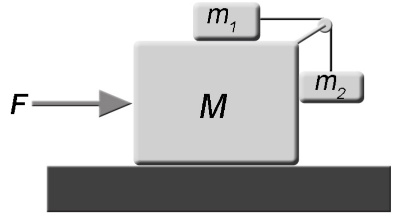
$$M_E = \frac{gR_E^2}{G} = 5,98 \cdot 10^{24}kg$$

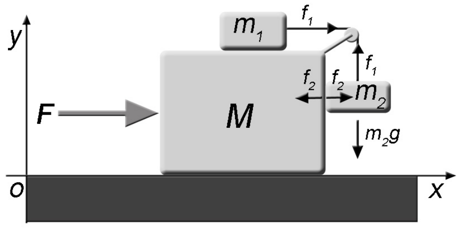
und damit die mittlere Dichte der Erde

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_E}{4\pi R_E^3} = 5500\,\frac{kg}{m^3}$$

5 Kräftegleichgewicht

Man berechne die notwendige horizontale Kraft, um jegliche relative Bewegung von m_1, m_2 und M (zu Abbildung 1) zu verhindern. Hierzu nehme man an, dass alle Bewegungen liefen reibungsfrei und die Trägheit von Seil und Rolle seien vernachlässigbar.





Lösung

In obiger Abbildung sind die Kräfte f_1, F und mg eingezeichnet. Wenn keine relative Bewegung zwischen m_1, m_2 und M stattfindet, sind die Beschleunigungen ebendieser gleich. Die folgende Gleichung beschreibt die Bewegung von m_1, m_2 und M entlang der x-Achse:

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$
$$m_1\ddot{\vec{x}} = \vec{f_1}$$

Da insbesondere keine relative Bewegung von m_2 in y-Richtung stattfindet, gilt

$$\vec{f_1} = m_2\vec{g}$$

In Kombination ergeben diese beiden Gleichungen

$$F = \frac{m_2(M + m_1 + m_2)g}{m_1}$$

6 Kreisbeschleunigung

Ein Zug fährt mit konstanter Tangentialbeschleunigung auf einem Kreisbogen mit dem Radius $r = 2\,\mathrm{km}$. Dabei legt er die Strecke $\Delta s = 1200\,\mathrm{m}$ zurück. Zu Beginn der betrachteten Bewegung hat er die Geschwindigkeit $v_1 = 30\,\mathrm{km/h}$ und am Ende $v_2 = 100\,\mathrm{km/h}$.

1. Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang?
2. Wie groß ist die Tangentialbeschleunigung?
3. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung.
4. Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung zu Beginn und am Ende des Vorgangs?

Lösung

1.

$$x = \Delta s = v_1 t + \frac{a}{2}t^2 \tag{7}$$
$$v_2 = \frac{\partial x}{\partial t} = v_1 + at \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t} \tag{8}$$

(7) in (8)

$$\Delta s = v_1 t + \frac{v_2 - v_1}{2t} t^2 \tag{9}$$

$$= v_1 t + \frac{v_2 - v_1}{2} t \tag{10}$$

$$t = \frac{2\Delta s}{v_1 + v_2} = \frac{2400m}{130\frac{km}{h}} = 66,5s \tag{11}$$

2.

$$v_2 = v_1 + a_t t \Rightarrow a_t = \frac{v_2 - v_1}{t} = 0,29\frac{m}{s^2} \tag{12}$$

3.

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial v}{r \partial t} = \frac{a_t}{r} = 1,44 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s^2} \tag{13}$$

4.

$$a_z = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \tag{14}$$

$$\Rightarrow a_z(v_1) = 0,0347\frac{m}{s^2} \tag{15}$$

$$a_z(v_2) = 0,386\frac{m}{s^2} \tag{16}$$

7 Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Auto fährt geradlinig mit der Geschwindigkeit $v_0 = 96\frac{km}{h}$ auf der Autobahn. Die Räder haben den Durchmesser $d = 2r_2 = 58cm$

1. Welche Radialbeschleunigung a_r hat die Ventilkappe das Rades, die sich im Abstand $r_1 = 14,5cm$ von der Achse befindet?
2. In welcher Zeit t_1 ändert sich die Richtung der Tangentialgeschwindigkeit dieser Kappe um den Winkel $\varphi_1 = 60°$? (Hierbei soll die Drehung um die mitbewegte Achse des Rades betrachtet werden.)
3. Angenommen, die Ventilkappe löse sich gerade beim Durchgang im oberen Punkt. In welcher Richtung würde sie sich unmittelbar nach dem Lösen bewegen und wie groß wäre die Geschwindigkeit v_K?

Lösung:

1. Die Radialbeschleunigung der Ventilkappe ist

$$a_r = \omega^2 r_1 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{v_0}{r_2} \tag{17}$$

also

$$a_r = \left(\frac{v_0}{r_2}\right)^2 \cdot r_1 = 1,20 \cdot 10^3 \frac{m}{s^2} \tag{18}$$

Das ist das 122-fache der Erdbeschleunigung g.

2. Der Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und Zeit t folgt aus der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{19}$$

die hier konstant ist. Diese Gleichung wird integriert:

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \omega \cdot \int_0^{t_1} dt \tag{20}$$

Als Grenzen wurden die zusammengehörigen Werte der Variablen eingesetzt. Damit ist $\varphi_1 = \omega t_1$. Mit $\omega = \frac{v_0}{r_2}$ erhalten wir weiter

$$t_1 = \frac{r_2 \cdot \varphi_1}{v_0} = 1,15 \cdot 10^{-2} s \tag{21}$$

3. Die Führung auf der Kreisbahn hört im oberen Punkt auf. Die Bahngeschwindigkeit der Kappe zeigt in diesem Punkt in Fahrtrichtung. In diese Richtung wird sie auch weggeschleudert. Um die Gesamtgeschwindigkeit der Kappe in diesem Punkt zu ermitteln, muss zur Fahrtgeschwindigkeit v_0 noch die Umlaufgeschwindigkeit $v_1 = \omega r_1$ der Kappe addiert werden:

$$v_K = v_0 + r_1\omega, \text{ wobei } \omega = \frac{v_0}{r_2} \tag{22}$$

$$v_K = v_0 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = 1,5 v_0 = 143 \frac{km}{h} \tag{23}$$