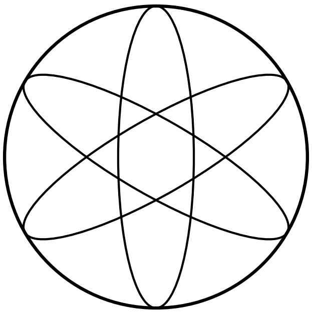
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Distributionen

Autor: Maximilian Jokel, Benjamin Rüth
Stand: 14. März 2016

Aufgabe 1 (Ableitung der Heaviside-Funktion) Wir betrachten die durch

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Heaviside-Funktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Zeigen Sie, dass deren distributionelle Ableitung die Delta-Distribution ist.

Lösung 1. *Fassen wir die Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ als Distribution auf, so können wir diese als*

$$\Theta[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\phi(x) \, \mathrm{d}x$$

schreiben wobei ϕ dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entstammt. Die Ableitung der Heaviside-Funktion $\Theta'(x)$ aufgefasst als Distribution lautet somit

$$\Theta'[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \Theta'(x)\phi(x) \, \mathrm{d}x$$

Durch partielle Integration lässt sich dies umschreiben zu

$$\begin{aligned} \ldots &= [\Theta(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\phi'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\lim_{x\to\infty} (\Theta(x)\phi(x)) - \lim_{x\to-\infty} (\Theta(x)\phi(x))\right] - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\phi'(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Während der erste Term innerhalb der eckigen Klammern aufgrund der Definition der Heaviside-Funktion trivialerweise den Wert Null liefert, verschwindet der zweite Term innerhalb der eckigen Klammern aufgrund der Tatsache, dass ϕ im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt und somit für $|x| \to \infty$ schneller als jede Potenzfunktion gegen Null strebt. Damit verbleibt

$$\ldots = -\int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\phi'(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} \phi'(x) \, \mathrm{d}x = -\left[\phi(x)\right]_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} \phi(x) - \phi(0)\right)$$

Verwendet man erneut, dass ϕ im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt und somit für $x \to +\infty$ schneller als jede Potenzfunktion gegen Null strebt, so verbleibt nur der Term $\phi(0)$. Aus der Vorlesung wissen wir aber, dass es gerade die Delta-Distribution ist, die einer Testfunktion ϕ den Wert $\phi(0)$ zuordnet. Damit können wir schlussfolgern

$$\Theta'[\phi] = \cdots = \phi(0) \equiv \delta[\phi]$$

Aufgabe 2 (Ableitung der Betragsfunktion) Wir betrachten die durch

$$\operatorname{abs}(x) := \begin{cases} +x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Betragsfunktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Berechnen Sie deren erste und zweite Ableitung im distributionellen Sinne.

Lösung 2. *Fassen wir die Betragsfunktion* $\operatorname{abs}(x)$ *als Distribution auf, so können wir diese als*

$$\operatorname{abs}[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{abs}(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x$$

schreiben wobei ϕ dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entstammt. Die Ableitung der Betragsfunktion $\operatorname{abs}'(x)$ *aufgefasst als Distribution lautet somit*

$$\operatorname{abs}'[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{abs}'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x$$

Durch partielle Integration lässt sich dies umschreiben zu

$$\begin{aligned} \ldots &= [\operatorname{abs}(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} [\operatorname{abs}(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\lim_{x\to\infty} (\operatorname{abs}(x)\phi(x)) - \lim_{x\to-\infty} (\operatorname{abs}(x)\phi(x))\right] - \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{abs}(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\lim_{x\to\infty} (+x\phi(x)) - \lim_{x\to-\infty} (-x\phi(x))\right] - \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{abs}(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass ϕ im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt und somit stärker als jede beliebige Polynomfunktion gegen Null tendiert, verschwindet der gesamte Ausdruck in Klammern und es verbleibt

$$\ldots = -\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{abs}(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x$$

Teilt man das Integral entsprechend der Definition der Betragsfunktion auf so erhält man

$$\ldots = -\left(\int\limits_{-\infty}^{0} (-x)\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} x\phi'(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

Durch partielle Integration finden wir

$$\ldots = -\left(\left[-x\phi(x)\right]_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} (-1)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x + \left[x\phi(x)\right]_{0}^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} (-1)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei wir erneut die Eigenschaften der Funktion $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ausgenutzt haben. Schreibt man die verbliebenen Integrale unter Zuhilfenahme der Heaviside-Funktion um, so ergibt sich

$$\ldots = -\int\limits_{-\infty}^{0} \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Theta(x))\,\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1 + 2\Theta(x))\,\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\mathrm{abs}'[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{abs}'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1 + 2\Theta(x))\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = (-1 + 2\Theta)\,[\phi]$$

woraus wir schlussfolgern können, dass die erste Ableitung der Betragsfunktion $\mathrm{abs}(x)$ *im distributionellen Sinne durch $-1 + 2\Theta(x)$ gegeben ist.*

Die zweite Ableitung ergibt sich unter Ausnutzung der Homogenität und Linearität des Integrals sowie unter Verwendung des Ergebnisses der ersten Aufgabe zu

$$\mathrm{abs}''[\phi] = (-1 + 2\Theta)'\,[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} (-1 + 2\Theta)'\,(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (-1)'\,(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{\mathbb{R}} \Theta'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Theta'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \Theta'[\phi] = \delta[\phi]$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die Ableitung der konstanten Funktion gleich der Nullfunktion ist. Somit können wir schlussfolgern, dass die zweite Ableitung der Betragsfunktion $\mathrm{abs}(x)$ *im distributionellen Sinne durch $\delta(x)$ gegeben ist.*

Aufgabe 3 (Ableitung der Signumfunktion) Wir betrachten die durch

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ \pm 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Signumfunktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Zeigen Sie, dass deren distributionelle Ableitung durch das Zweifache der Delta-Distribution gegeben ist.

Lösung 3. *Fassen wir die Signumfunktion* $\operatorname{sgn}(x)$ *als Distribution auf, so können wir diese als*

$$\operatorname{sgn}[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

schreiben wobei ϕ *dem Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *entstammt. Die Ableitung der Signumfunktion* $\operatorname{sgn}'(x)$ *aufgefasst als Distribution lautet somit*

$$\operatorname{sgn}'[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Durch partielle Integration lässt sich dies umschreiben zu

$$\begin{aligned} \ldots &= [\operatorname{sgn}(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x) - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\right] - \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass ϕ *im Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *liegt und somit stärker als jede beliebige Polynomfunktion gegen Null tendiert, verschwindet der gesamte Ausdruck in Klammern und es verbleibt*

$$\ldots = -\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Teilt man das Integral entsprechend der Definition der Signumfunktion auf so erhält man

$$\ldots = -\left(\int\limits_{-\infty}^{0} (-1)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $x = 0$ *bezüglich der Menge* $\mathbb{R}$ *der rellen Zahlen eine Nullmenge darstellt und das Integral über diese Nullmenge dementsprechend keinen*

Beitrag liefert. Durch Integration finden wir

$$\begin{aligned}
\dots &= \int\limits_{-\infty}^{0} \phi'(x)\ \mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{+\infty} \phi'(x)\ \mathrm{d}x = [\phi(x)]_{-\infty}^{0} - [\phi(x)]_{0}^{\infty} \\
&= \left[\phi(0) - \lim_{x\to-\infty} \phi(x)\right] - \left[\lim_{x\to\infty} \phi(x) - \phi(0)\right] = 2\phi(0)
\end{aligned}$$

Nutzt man die Eigenschaften der Delta-Distribution aus„ so ergibt sich schlussendlich

$$\dots = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x = 2\delta[\phi]$$

Insgesamt erhält man also

$$\mathrm{sgn}'[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{sgn}'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x = \dots = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x = 2\delta[\phi]$$

woraus wir schlussfolgern können, dass die Ableitung der Signumfunktion $\mathrm{sgn}(x)$ *im distributionellen Sinne durch* $2\delta(x)$ *gegeben ist.*

Aufgabe 4 (Skalierung der Delta-Distribution) Wir betrachten die in der Vorlesung als

$$\delta[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x$$

definierte Delta-Distribution. Dabei ist der erste Ausdruck rein symbolisch zu verstehen und durch den zweiten Ausdruck definiert. Zeigen Sie, dass für die Delta-Distribution die symbolisch zu verstehende Relation

$$\delta\left(\lambda x\right) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|^n}$$

gilt.

Lösung 4. *Um die geforderte Relation herzuleiten betrachten wir die durch*

$$\tilde{\delta}[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\lambda x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\phi(x)$$

definierte Distribution $\tilde{\delta}$ *wobei der erste Ausdruck wieder nur symbolisch zu verstehen ist und durch den zweiten Ausdruck definiert ist. Mittels der Variablentransformation* $\tilde{x} = \lambda x$ *ergibt sich in symbolischer Schreibweise*

$$\begin{aligned}
\dots &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\tilde{x})\phi\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda}\right) \left|\det\left(\frac{1}{\lambda}\cdot \mathbb{1}_{n\times n}\right)\right| \mathrm{d}^n\tilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\tilde{x})\phi\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda}\right)\ \left|\lambda^{-n}\right| \mathrm{d}^n\tilde{x} \\
&= \frac{1}{|\lambda|^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\tilde{x})\phi\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda}\right)\ \mathrm{d}^n\tilde{x} = \frac{\phi(0)}{|\lambda|^n}
\end{aligned}$$

wobei wir den Transformationssatz sowie die Definition der Delta-Distribution verwendet haben. Interpretiert man $\phi(0)$ wiederum als Delta-Distribution so findet man insgesamt

$$\tilde{\delta}[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\lambda x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x = \dots = \frac{\phi(0)}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x)}{|\lambda|^n}\phi(x)\ \mathrm{d}^n x$$

woraus sich die symbolisch zu verstehende Relation

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|^n}$$

ablesen lässt.

Aufgabe 5 (Delta-Distribution) Wir betrachten erneut die in Aufgabe 4 definierte Delta-Distribution.

5.1 Berechnen Sie die distributionelle Ableitung der Delta-Distribution.

5.2 Berechnen Sie ausgehend von Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe 5.1 die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution.

Lösung 5.

5.1. *Die Ableitung der Delta-Distribution ist in symbolischer Schreibweise gegeben durch*

$$\delta'[\phi] = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x$$

wobei ϕ wieder dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entstammt und δ_k die Folgenglieder einer Dirac-Folge sind. Durch partielle Integration lässt sich dies zu

$$\dots = \lim_{k\to\infty} \left([\delta_k(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}^n x \right)$$

umschreiben. Nachdem sowohl die Folgenglieder $\delta_k(x)$ der Dirac-Folge als auch die Testfunktionen $\phi(x)$ für $\|x\| \to \infty$ gegen Null tendieren, verschwindet der erste Term und es verbleibt

$$\dots = -\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x = -\phi'(0)$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der Delta-Distribution verwendet haben.

5.2. *Zur Berechnung der Fourier-Transformierten den Ableitung der Delta-Distribution verwenden wir die Definition aus der Vorlesung, wonach die Fourier-Transformierte $\widehat{T_f}[\phi]$ einer Distribution durch $T_f[\hat{\phi}]$ gegeben ist. Damit ergibt sich in unserem Fall*

$$\widehat{\delta'}[\phi] = \delta'\left[\hat{\phi}\right]$$

Aus der ersten Teilaufgabe kennen wir aber bereits die Wirkung der Distribution $\delta'[\phi]$ auf eine Testfunktion ϕ. Ersetzen wir die Testfunktion ϕ durch deren Fourier-Transformierte $\hat{\phi}$ so erhalten wir schließlich

$$\widehat{\delta'}[\phi] = \delta'\left[\hat{\phi}\right] = -\left(\hat{\phi}(0)\right)' = -\hat{\phi}'(0)$$

Aufgabe 6 (Fourier-Transformation von Distributionen I) Für eine Distribution T_f aus dem Distributionen-Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Distribution $x^\alpha T_f$ gemäß

$$(x^\alpha T_f)[\phi] := T_f[x^\alpha \phi]$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ einen Multiindex bezeichnet und $x^\alpha \phi$ durch $(x^\alpha \phi)(y) = y^\alpha \phi(y)$ erklärt ist.

6.1 Zeigen Sie damit, dass für Distributionen $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Relation

$$\widehat{x^\alpha T_f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial^\alpha T_{\hat{f}}$$

gilt.

6.2 Zeigen Sie zudem, dass die in der Vorlesung für Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gezeigte Relation

$$\widehat{\partial^\alpha f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k)$$

auch für Distributionen $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Lösung 6.

6.1. *Um die geforderte Relation herzuleiten, verwenden wir erneut die in der Vorlesung gegebene Definition der Fourier-Transformation einer Distribution zusammen mit der Definition der Distribution $x^\alpha T_f$ aus der Aufgabenstellung. Damit ergibt sich*

$$\widehat{(x^\alpha T_f)}[\phi] = (x^\alpha T_f)[\hat{\phi}] = T_f\left[x^\alpha \hat{\phi}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} f(k) \left(x^\alpha \hat{\phi}\right)(k) \, \mathrm{d}^n k = \int_{\mathbb{R}^n} f(k) k^\alpha \hat{\phi}(k) \, \mathrm{d}^n k$$

wobei wir die zur Definition $(x^\alpha \phi)(y) = y^\alpha \phi(y)$ analoge Beziehung $\left(x^\alpha \hat{\phi}\right)(k) = k^\alpha \hat{\phi}(k)$ verwendet haben. Schreibt man den Term $k^\alpha \hat{\phi}(k)$ aus

$$\begin{aligned} k^\alpha \hat{\phi}(k) &= k^\alpha \left((2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k \cdot x) \, \phi(x) \, \mathrm{d}^n x \right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} k^\alpha \exp(-\mathrm{i}k \cdot x) \, \phi(x) \, \mathrm{d}^n x \end{aligned}$$

so erkennt man, dass sich der Integrand wie folgt umschreiben lässt

$$\begin{aligned}
k^\alpha \exp(-\mathrm{i}k\cdot x) &= k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_n^{\alpha_n} \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^n k_i x_i\right) \\
&= \left(\frac{1}{(-\mathrm{i})^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{1}{(-\mathrm{i})^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\mathrm{d}x_2^{\alpha_2}}\right) \dots \left(\frac{1}{(-\mathrm{i})^{\alpha_n}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^n k_i x_i\right) \\
&= \left(\mathrm{i}^{\alpha_1} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\mathrm{i}^{\alpha_2} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\mathrm{d}x_2^{\alpha_2}}\right) \dots \left(\mathrm{i}^{\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^n k_i x_i\right) \\
&= \mathrm{i}^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\mathrm{d}x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}} \exp(-\mathrm{i}k\cdot x) \\
&= \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
k^\alpha \hat{\phi}(k) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)\, x^\alpha \phi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} k^\alpha \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)\, \phi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)\, \phi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= \dots = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \left((2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k\cdot x)\, \partial_x^\alpha \phi(x)\ \mathrm{d}^n x \right) \\
&= (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, \widehat{\partial^\alpha \phi}(k)
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt durch wiederholtes Anwenden der partiellen Integration die Ableitungen sukzessive auf die Testfunktion hinübergeschaufelt haben. Dabei haben wir verwendet, dass sich für jede der $|\alpha|$ *partiellen Integrationen jeweils ein Faktor* $(-\mathrm{i})$ *ergibt und zusätzlich sämtliche Randterme aufgrund der Tatsache* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *verschwinden. Setzt man dies in die anfängliche Gleichung ein, so erhalten wir*

$$\widehat{x^\alpha T_f}[\phi] = \dots = \int_{\mathbb{R}^n} f(k) k^\alpha \hat{\phi}(k)\ \mathrm{d}^n k = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(k) \widehat{\partial^\alpha \phi}(k)\ \mathrm{d}^n k = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, T_f\left[\widehat{\partial^\alpha \phi}\right]$$

Verwendet man die Definitionen zur Fourier-Transformation und Ableitung von Distributionen so ergibt sich schließlich die gesuchte Relation

$$\dots = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, T_f\left[\widehat{\partial^\alpha \phi}\right] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, T_{\hat{f}}[\partial^\alpha \phi] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha T_{\hat{f}}[\phi] = \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial^\alpha T_{\hat{f}}[\phi]$$

6.2. *Die Herleitung der zweiten Relation verwendet im Wesentlichen die gleichen Schritte wie der Beweis der ersten Relation. Mit der Definition der Fourier-Transformation* *einer Distribution ergibt sich*

$$\widehat{(\partial^\alpha T_f)}[\phi] = (\partial^\alpha T_f)\,[\hat{\phi}] = (-1)^{|\alpha|}\, T_f\left[\partial_k^\alpha \hat{\phi}\right] = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(k)\left(\partial_k^\alpha \hat{\phi}\right)(k)\ \mathrm{d}^n k$$

Schreibt man die Ableitung $\partial_k^\alpha \hat{\phi}(k)$ *aus*

$$\begin{aligned}
\partial_k^\alpha \hat{\phi}(k) &= \partial_k^\alpha \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot x\right)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x \right) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k^\alpha \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot x\right)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, x^\alpha \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot x\right)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot x\right)\left(x^\alpha \phi\right)(x)\ \mathrm{d}^n x \right) \\
&= (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha \phi}(k)
\end{aligned}$$

und setzt dies in die anfängliche Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha T_f}[\phi] = \ldots &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(k)\left(\partial_k^\alpha \hat{\phi}\right)(k)\ \mathrm{d}^n k \\
&= (-1)^{|\alpha|}\,(-\mathrm{i})^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(k)\widehat{x^\alpha \phi}(k)\ \mathrm{d}^n k \\
&= \mathrm{i}^{|\alpha|} T_f\left[\widehat{x^\alpha \phi}\right]
\end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen zur Fourier-Transformation sowie die zur Definition $\left(x^\alpha \phi\right)(y) = y^\alpha \phi(y)$ *analoge Beziehung* $\left(x^\alpha \hat{\phi}\right)(k) = k^\alpha \hat{\phi}(k)$ *so ergibt sich schließlich die gesuchte Relation*

$$\cdots = \mathrm{i}^{|\alpha|} T_f\left[\widehat{k^\alpha \phi}\right] = \mathrm{i}^{|\alpha|} T_{\hat{f}}\left[k^\alpha \phi\right] = \mathrm{i}^{|\alpha|} k^\alpha T_{\hat{f}}\left[k^\alpha \phi\right]$$

Aufgabe 7 (Fourier-Transformation von Distributionen II) In der Vorlesung haben wir in einer Bemerkung erwähnt, dass jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$T_f[\phi] := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x$$

eine Distribution definiert. Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden als Distributionen interpretierten Funktionen

7.1

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} x\cdot Ax\right) \qquad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ positiv definit}$$

7.2

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \exp\left(\mathrm{i}k_0 \cdot x\right) \qquad \text{mit } k_0 \in \mathbb{R}^n$$

7.3

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)$$

7.4

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

Lösung 7.

7.1. *Fassen wir die angegebene Funktion f als Distribution auf und wälzen über die Definition der Fourier-Transformation von Distributionen die Fourier-Transformation auf die Testfunktion ϕ so ergibt sich*

$$\widehat{T_f}[\phi] = T_f[\hat{\phi}] = T_{\hat{f}}[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\phi(k)\,\mathrm{d}^n k$$

Damit ist die Fourier-Transformation einer Distribution mit der distributionserzeugenden Funktion f gerade durch die Distribution mit der distributionserzeugenden Funktion $\hat{f}$ gegeben.

Möchte man die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ explizit berechnen so müssen wir zunächst die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf Diagonalform bringen. Dazu schreiben wir das Argument der Exponentialfunktion wie folgt um

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x \cdot Ax &= -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbb{1}_{n\times n}A\mathbb{1}_{n\times n}x = -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QAA^{\mathrm{T}}Qx \\ &= -\frac{1}{2}\left(Qx\right)^{\mathrm{T}}QAQ^{\mathrm{T}}\left(Qx\right) = -\frac{1}{2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}D_A\tilde{x} = -\frac{1}{2}\tilde{x}\cdot D_A\tilde{x} \end{aligned}$$

wobei wir eine Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n} = Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}}$ mit orthogonalen Matrizen Q, Q^{T} eingefügt haben, sodass $D_A := QAQ^{\mathrm{T}}$ in den neuen Variablen $\tilde{x} := Qx$ diagonal ist. Setzt man dies in die Formel für die Fourier-Transformation ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x\cdot Ax\right)\,\mathrm{d}^n x \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot Q^{\mathrm{T}}\tilde{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}\cdot D_A\tilde{x}\right)\,\left|\det\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)\right|\mathrm{d}^n\tilde{x} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir den Transformationssatz sowie die Tatsache, dass Q eine orthogonale Matrix ist und damit $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$ gilt, verwendet. Der aus dem Transformationssatz *resultierende Volumenfaktor kollabiert zu Eins, da wir es mit einer orthogonalen Transformation zu tun haben. Definiert man* $\tilde{k} := Qx$ *so verbleibt*

$$\begin{aligned}
\ldots &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}\tilde{k}\cdot\tilde{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}\cdot D_A\tilde{x}\right) \mathrm{d}^n\tilde{x} \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\tilde{k}_i\tilde{x}_i\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(D_A)_{ii}\,\tilde{x}_i^2\right) \mathrm{d}^n\tilde{x} \\
&= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}\tilde{k}_i\tilde{x}_i\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(D_A)_{ii}\,\tilde{x}_i^2\right) \mathrm{d}^n\tilde{x}_i\right) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(D_A)_{ii}\,\tilde{x}_i^2 - \mathrm{i}\tilde{k}_i\tilde{x}_i\right) \mathrm{d}^n\tilde{x}_i\right)
\end{aligned}$$

Mit der üblichen quadratischen Ergänzung lässt sich dies zu

$$\ldots = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{\tilde{k}_i^2}{2(D_A)_{ii}}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(D_A)_{ii}\,\tilde{\tilde{x}}^2\right) \mathrm{d}^n\tilde{\tilde{x}}_i\right)$$

umformen wobei $\tilde{\tilde{x}}_i$ *als* $\tilde{\tilde{x}}_i := \tilde{x}_i + \frac{\mathrm{i}\tilde{k}_i}{(D_A)_{ii}}$ *definiert ist. Jedes der Integrale ist ein Gauß-Integral wodurch sich die Berechnung stark vereinfacht und schließlich nur*

$$\begin{aligned}
\ldots &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{\tilde{k}_i^2}{2(D_A)_{ii}}\right)\left(\frac{2\pi}{(D_A)_{ii}}\right)^{n/2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(D_A)_{ii}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{k}\cdot(D_A)^{-1}\tilde{k}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(D_A)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{k}\cdot(D_A)^{-1}\tilde{k}\right)
\end{aligned}$$

verbleibt. Die Fourier-Transformierte der Funktion f *lautet somit*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{\det(D_A)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{k}\cdot(D_A)^{-1}\tilde{k}\right)$$

7.2. *Setzt man die angegebene Funktion in die Definition der Fourier-Transformierten einer Distribution ein, so ergibt sich*

$$\begin{aligned}
\widehat{T_f}[\phi] = T_f\left[\hat{\phi}\right] &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(+\mathrm{i}k_0\cdot k\right)\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}^n k \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot(-k_0)\right)(2\pi)^{+n/2}\,\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}^n k
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt eine nahrhafte Eins eingefügt. Vergleicht man dies mit Aufgabe 1.3 auf dem vierten Übungsblatt und identifiziert $\hat{f}(k) \equiv (2\pi)^{+n/2}\,\hat{\phi}(k)$ und $x_0 \equiv -k_0$, so lässt sich die Lösung direkt ablesen

$$\ldots = (2\pi)^{+n/2}\,\hat{\phi}(-k_0)$$

Ruft man sich die Wirkung der Delta-Distribution in Erinnerung

$$\delta[\phi] = \phi(0)$$

so erkennt man, dass sich unser Ergebnis durch die Delta-Distribution darstellen lässt

$$\ldots = (2\pi)^{+n/2}\,\hat{\phi}(-k_0) = (2\pi)^{+n/2}\,\delta_{-k_0}\left[\hat{\phi}\right]$$

7.3. *Setzt man die angegebene Funktion in die Definition der Fourier-Transformierten einer Distribution ein und schreibt die Kosinusfunktion in zwei Exponentialfunktionen um, so ergibt sich*

$$\begin{aligned}
\widehat{T_f}[\phi] = T_f\left[\hat{\phi}\right] &= \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(k)\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(\exp\left(+\mathrm{i}k\right) + \exp\left(-\mathrm{i}x\right)\right)\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}k\right)\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k + \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}k\right)\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k\right)
\end{aligned}$$

Fügt man bei beiden Integralen wieder eine nahrhafte Eins ein, so ergibt sich analog zur vorausgegangenen Teilaufgabe

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}k(-1)\right)\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}k(+1)\right)\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(k)\,\mathrm{d}k\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta_{-1}\left[\hat{\phi}\right] + \delta_{+1}\left[\hat{\phi}\right]\right)
\end{aligned}$$

7.4. *Die Berechnung der Fourier-Transformierten der als Distribution interpretierten Funktion $f(x) = x^2$ erübrigt sich wenn wir das Ergebnis aus Teilaufgabe 6.1 verwenden. Identifizieren wir $\alpha \equiv 2$ sowie $T_f \equiv 1$ so ergibt sich*

$$\widehat{(x^2 \cdot 1)}[\phi] = \mathrm{i}^2\partial^2\hat{1} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\hat{1}$$

Aus der Vorlesung aber wissen wir, dass die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution die Funktion $(2\pi)^{-n/2}$ ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die Fourier-Transformierte *der Einsfunktion gerade durch* $(2\pi)^{+n/2}\,\delta(k)$ *gegeben ist. Damit ergibt sich für die Fourier-Transformierte der Funktion* $f(x) = x^2$

$$\widehat{(x^2 \cdot 1)}[\phi] = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\hat{1} = -\sqrt{2\pi}\delta''[\phi]$$