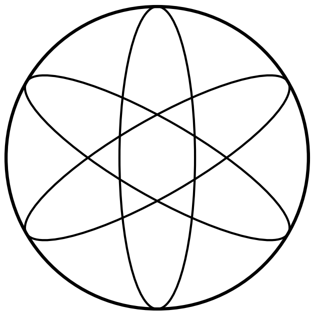
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Distributionen

Autor: Maximilian Jokel, Benjamin Rüth
Stand: 14. März 2016

Aufgabe 1 (Ableitung der Heaviside-Funktion) Wir betrachten die durch

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Heaviside-Funktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Zeigen Sie, dass deren distributionelle Ableitung die Delta-Distribution ist.

Aufgabe 2 (Ableitung der Betragsfunktion) Wir betrachten die durch

$$\operatorname{abs}(x) := \begin{cases} +x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Betragsfunktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Berechnen Sie deren erste und zweite Ableitung im distributionellen Sinne.

Aufgabe 3 (Ableitung der Signumfunktion) Wir betrachten die durch

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ \pm 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

definierte Signumfunktion, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Zeigen Sie, dass deren distributionelle Ableitung durch das Zweifache der Delta-Distribution gegeben ist.

Aufgabe 4 (Skalierung der Delta-Distribution) Wir betrachten die in der Vorlesung als

$$\delta[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\phi(x)\ \mathrm{d}^n x$$

definierte Delta-Distribution. Dabei ist der erste Ausdruck rein symbolisch zu verstehen und durch den zweiten Ausdruck definiert. Zeigen Sie, dass für die Delta-Distribution die symbolisch zu verstehende Relation

$$\delta\left(\lambda x\right) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|^n}$$

gilt.

Aufgabe 5 (Delta-Distribution) Wir betrachten erneut die in Aufgabe 4 definierte Delta-Distribution.

5.1 Berechnen Sie die distributionelle Ableitung der Delta-Distribution.

5.2 Berechnen Sie ausgehend von Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe 5.1 die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution.

Aufgabe 6 (Fourier-Transformation von Distributionen I) Für eine Distribution T_f aus dem Distributionen-Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Distribution $x^\alpha T_f$ gemäß

$$(x^\alpha T_f)\,[\phi] := T_f[x^\alpha \phi]$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ einen Multiindex bezeichnet und $x^\alpha \phi$ durch $(x^\alpha \phi)\,(y) = y^\alpha \phi(y)$ erklärt ist.

6.1 Zeigen Sie damit, dass für Distributionen $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Relation

$$\widehat{x^\alpha T_f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \partial^\alpha T_{\hat{f}}$$

gilt.

6.2 Zeigen Sie zudem, dass die in der Vorlesung für Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gezeigte Relation

$$\widehat{\partial^\alpha f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k)$$

auch für Distributionen $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Aufgabe 7 (Fourier-Transformation von Distributionen II) In der Vorlesung haben wir in einer Bemerkung erwähnt, dass jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$T_f[\phi] := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\;\mathrm{d}^n x$$

eine Distribution definiert. Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden als Distributionen interpretierten Funktionen

7.1

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} x \cdot Ax\right) \qquad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ positiv definit}$$

7.2

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \exp\left(\mathrm{i} k_0 \cdot x\right) \qquad \text{mit } k_0 \in \mathbb{R}^n$$

7.3

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)$$

7.4

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$