Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Fourier-Transformation und Faltung

Autor: Maximilian Jokel, Benjamin Rüth

Stand: 10. März 2016

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Fourier-Transformation) Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften der Fourier-Transformation für Funktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1.1 Homogenität

$$\widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C}$$

1.2 Linearität

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$$

1.3 Translation (Verschiebung im Ortsraum)

$$g(x) := f(x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right) \hat{f}(k)$$

1.4 Modulation (Verschiebung im Frequenzraum)

$$g(x) := \exp\left(+\mathrm{i}k_0 \cdot x\right) f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \hat{f}(k - k_0)$$

1.5 Skalierung

$$g(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$$

Lösung 1.

1.1. *Die Homogenität der Fourier-Transformation folgt unmittelbar aus der Definition der Fourier-Transformation als Integraltransformation*

$$\widehat{\alpha f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) \left(\alpha f(x)\right) \,\mathrm{d}^n x \tag{0.1}$$

$$= \alpha \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) f(x) \,\mathrm{d}^n x \right) \tag{0.2}$$

$$= \alpha \hat{f}(k) \tag{0.3}$$

1.2. *Auch die Linearität der Fourier-Transformation ist eine direkte Konsequenz der Definition der Fourier-Transformation als Integraltransformation*

$$\widehat{f+g}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) \left(f(x) + g(x)\right) \,\mathrm{d}^n x \tag{0.4}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) f(x) \,\mathrm{d}^n x + (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) g(x) \,\mathrm{d}^n x \tag{0.5}$$

$$= \hat{f}(k) + \hat{g}(k) \tag{0.6}$$

1.3. *Zum Beweis der Translationseigenschaft der Fourier-Transformation setzen wir die gegebene Funktion* $g(x) := f(x - x_0)$ *in die Definition der Fourier-Transformation ein und erhalten*

$$\hat{g}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) g(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.7}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) f(x - x_0)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.8}$$

Mittels der Variablentransformation $\tilde{x} := x - x_0$ *lässt sich dies zu*

$$\dots = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot (\tilde{x} + x_0)\right) f(\tilde{x})\, \mathrm{d}^n \tilde{x} \tag{0.9}$$

umschreiben. Aufspalten des Exponentialfaktors ergibt schließlich

$$\dots = \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot \tilde{x}\right) \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right) f(\tilde{x})\, \mathrm{d}^n \tilde{x} \right) \tag{0.10}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right) \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot \tilde{x}\right) f(\tilde{x})\, \mathrm{d}^n \tilde{x} \right) \tag{0.11}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right) \hat{f}(k) \tag{0.12}$$

Wir erkennen, dass sich eine Verschiebung um $-x_0$ *im Ortsraum in eine Multiplikation mit dem Faktor* $\exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right)$ *übersetzt.*

1.4. *Zum Beweis der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation gehen wir analog zur vorausgegangenen Teilaufgabe vor indem wir die gegebene Funktion* $g(x) := \exp\left(+\mathrm{i}k_0 \cdot x\right) f(x)$ *in die Definition der Fourier-Transformation einsetzen*

$$\hat{g}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) g(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.13}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) \exp\left(+\mathrm{i}k_0 \cdot x\right) f(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.14}$$

Fasst man die beiden Exponentialfaktoren zusammen, so erhält man schließlich

$$\dots = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathrm{i}\left(k - k_0\right) \cdot x\right) f(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.15}$$

$$= \hat{f}(k - k_0) \tag{0.16}$$

Analog zur vorausgegangenen Teilaufgabe erkennen wir, dass sich die Multiplikation der Funktion im Ortsraum mit einem Phasenfaktor $\exp\left(+\mathrm{i}k_0 \cdot x\right)$ *in eine Verschiebung um* $-k_0$ *im Impulsraum übersetzt.*

1.5. *Zum Schluss beweisen wir auch noch die Skalierungseigenschaft der Fourier-Transformation was erneut direkt über Einsetzen der gegebenen Funktion $g(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ in die Definition erfolgt*

$$\hat{g}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k \cdot x)\, g(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{0.17}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k \cdot x)\, f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathrm{d}^n x \tag{0.18}$$

Mittels der Variablentransformation $\tilde{x} := \frac{x}{\lambda}$ lässt sich dies zu

$$\ldots = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}k \cdot (\lambda\tilde{x}))\, f(\tilde{x})\, \lambda^n \mathrm{d}^n \tilde{x} \tag{0.19}$$

$$= \lambda^n \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-\mathrm{i}\,(\lambda k) \cdot \tilde{x})\, f(\tilde{x})\, \mathrm{d}^n \tilde{x} \right) \tag{0.20}$$

Nachdem X aus $\mathbb{R}^n$ stammt, bedeutet die Variablentransformation $\tilde{x} := \frac{x}{\lambda}$ ausgeschrieben $\tilde{x}_i := \frac{x_i}{\lambda}$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Damit ergibt sich für das Differential ein Faktor λ^n statt λ. Zieht man diesen konstanten Faktor vor das Integral so erhält man schließlich

$$\ldots = \lambda^n \hat{f}(\lambda k) \tag{0.21}$$

Aufgabe 2 (Fourier-Transformation I) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten $\hat{f}$ der folgenden Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

2.1

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

HINWEIS: Diese Aufgabe lässt sich auf zwei unterschiedlichen Wegen lösen. Versuchen Sie beide Lösungswege zu ergründen.

2.2

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } |x| \geq 0 \end{cases}$$

HINWEIS: Auch diese Aufgabe lässt sich auf zwei unterschiedlichen Wegen lösen. Versuchen Sie wiederum beide Lösungswege zu ergründen.

2.3

$$f(x) = \exp(-|x|)$$

2.4

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{R} & \text{für } |x| < R \\ 0 & \text{für } |x| \geq R \end{cases}$$

2.5

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cos(x)$$

HINWEIS: Lösen Sie dieses Integral zunächst explizit unter Zuhilfenahme der auch in der Vorlesung verwendeten Technik und anschließend der Eigenschaften der Fourier-Transformation.

2.6

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

HINWEIS: Überlegen Sie sich zunächst für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ das Fourier-Integral existiert und berechnen Sie dieses anschließend unter Ausnutzung seiner Symmetrieeigenschaften.

Lösung 2 (Fourier-Transformation I)**.**

2.1. *Setzt man die Funktion $f(x)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(k)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} \exp(-\mathrm{i}kx)\, x \,\mathrm{d}x \tag{0.22}$$

Um dieses Integral zu berechnen, stellen wir den Integranden $\exp(-\mathrm{i}kx)\,x$ *als Ableitung von* $\exp(-\mathrm{i}kx)$ *nach k dar*

$$x\exp(-\mathrm{i}kx) = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\exp(-\mathrm{i}kx) \tag{0.23}$$

Damit ergibt sich

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\exp(-\mathrm{i}kx)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-1}^{1}\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \tag{0.24}$$

wobei wir die Ableitung nach k aus dem Integral gezogen haben. Führt man das verbliebene Integral aus, so erhält man

$$\cdots = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{-\mathrm{i}k}\right]_{-1}^{1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{\exp(-\mathrm{i}k)-\exp(+\mathrm{i}k)}{\mathrm{i}k}\right) \tag{0.25}$$

Verwendet man die Exponentialdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(+\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.26}$$

so lässt sich der Ausdruck vereinfachen und man erhält schlussendlich

$$\cdots = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{-2\mathrm{i}\sin(k)}{-\mathrm{i}k}\right) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k\cos(k)-\sin(k)}{k^2} \tag{0.27}$$

2.2. *Setzt man die Funktion $f(x)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(k)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \exp(-\mathrm{i}kx)\cos(x)\ \mathrm{d}x \tag{0.28}$$

Wir berechnen das Integral zunächst, indem wir die Kosinusfunktion durch ihre Exponentialdarstellung

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.29}$$

ersetzen

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \exp(-\mathrm{i}kx) \cdot \frac{1}{2}\left(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.30}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \exp(-\mathrm{i}(k-1)x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \exp(-\mathrm{i}(k+1)x)\ \mathrm{d}x \right) \tag{0.31}$$

Berechnet man das Integral so ergibt sich

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}(k-1)x)}{-\mathrm{i}(k-1)} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \left[\frac{\exp(-\mathrm{i}(k+1)x)}{-\mathrm{i}(k+1)} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \right) \tag{0.32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{1}{-\mathrm{i}(k-1)} \left[\exp\left(-\mathrm{i}(k-1)\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(+\mathrm{i}(k-1)\frac{\pi}{2}\right) \right] \right. \tag{0.33}$$

$$\left. + \frac{1}{-\mathrm{i}(k+1)} \left[\exp\left(-\mathrm{i}(k+1)\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(+\mathrm{i}(k+1)\frac{\pi}{2}\right) \right] \right) \tag{0.34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{1}{-\mathrm{i}(k-1)} \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) \right] \right. \tag{0.35}$$

$$\left. + \frac{1}{-\mathrm{i}(k+1)} \left[\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) \right] \right) \tag{0.36}$$

wobei wir die Exponentialfaktoren aufgespaltet haben. Mit $\exp\left(\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \pm\mathrm{i}$ *ergibt sich*

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(-\frac{1}{k-1} \left[\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) + \exp\left(+\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) \right] \right. \tag{0.37}$$

$$\left. + \frac{1}{k+1} \left[\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) + \exp\left(+\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}\right) \right] \right) \tag{0.38}$$

Bemüht man die Exponentialdarstellung der Kosinusfunktion

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(+\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.39}$$

so ergibt sich

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(-\frac{2}{k-1}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{k+1}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{0.40}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{k+1}{k^2-1}+\frac{k-1}{k^2-1}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \tag{0.41}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{1-k^2} \tag{0.42}$$

wobei wir im vorletzten Schritt durch geeignetes Erweitern sowie im letzten Schritt durch Verrechnen des Minuszeichens sowie des auftretenden Faktors Zwei das Ergebnis vereinfacht haben.

2.3. *Setzt man die Funktion $f(x)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(k)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}kx\right)\exp\left(-|x|\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}kx-|x|\right)\,\mathrm{d}x \tag{0.43}$$

Um uns des Betrags im Argument des Exponentials zu entledigen spalten wir das Integral wie folgt auf

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\mathrm{i}kx+x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\exp\left(-\mathrm{i}kx-x\right)\,\mathrm{d}x\right) \tag{0.44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\left[1-\mathrm{i}k\right]x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\exp\left(-\left[1+\mathrm{i}k\right]x\right)\,\mathrm{d}x\right) \tag{0.45}$$

um diese schließlich zu integrieren

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{\exp\left(\left[1-\mathrm{i}k\right]x\right)}{1-\mathrm{i}k}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{\exp\left(-\left[1+\mathrm{i}k\right]x\right)}{1+\mathrm{i}k}\right]_{0}^{\infty}\right) \tag{0.46}$$

Auswertung an den Grenzen und Vereinfachung der entstehenden Ausdrücke liefert schließlich

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}k}+\frac{1}{1+\mathrm{i}k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+\mathrm{i}k}{1+k^2}+\frac{1-\mathrm{i}k}{1+k^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2} \tag{0.47}$$

2.4. *Setzt man die Funktion $f(x)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(k)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}kx\right)\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} \exp\left(-\mathrm{i}kx\right)\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\,\mathrm{d}x \tag{0.48}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktion $f(x)$ nur im Intervall $(-R, R)$ nichtverschwindende Werte annimmt. Analog zur vorhergehenden Aufgabe lösen wir den Betrag auf, indem wir das Integral aufspalten und die Terme geeignet sortieren

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-R}^{0} \exp(-\mathrm{i}kx) \left(1 + \frac{x}{R}\right) \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{R} \exp(-\mathrm{i}kx) \left(1 - \frac{x}{R}\right) \, \mathrm{d}x \right) \tag{0.49}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{R} \int\limits_{-R}^{0} x \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{R} \int\limits_{0}^{R} x \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \right) \tag{0.50}$$

Um die hinteren beiden Integrale zu lösen, stellen wir die Integranden wie folgt als Ableitungen von $\exp(-\mathrm{i}kx)$ nach k dar

$$\pm x \exp(-\mathrm{i}kx) = \mp \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \exp(-\mathrm{i}kx) \tag{0.51}$$

Damit ergibt sich

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\mathrm{i}R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \int\limits_{-R}^{0} \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathrm{i}R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \int\limits_{0}^{R} \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \right) \tag{0.52}$$

Berechnet man die Integrale und verwendet anschließend die Exponentialdarstellungen der Sinus- und Kosinusfunktion

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\exp(+\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.53}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \left(\exp(+\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right) \tag{0.54}$$

so ergibt sich

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-\frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{\mathrm{i}k} \right]_{-R}^{R} - \frac{1}{\mathrm{i}R} \left[-\frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{\mathrm{i}k} \right]_{-R}^{0} + \frac{1}{\mathrm{i}R} \left[-\frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{\mathrm{i}k} \right]_{0}^{R} \right) \tag{0.55}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{k} \sin(kR) + \frac{1}{\mathrm{i}R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(\frac{1 - \exp(\mathrm{i}kR)}{\mathrm{i}k} \right) + \frac{1}{\mathrm{i}R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(\frac{1 - \exp(-\mathrm{i}kR)}{\mathrm{i}k} \right) \right) \tag{0.56}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{k} \sin(kR) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(\frac{2 - \exp(\mathrm{i}kR) - \exp(-\mathrm{i}kR)}{kR} \right) \right) \tag{0.57}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{k} \sin(kR) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(\frac{2 - 2\cos(kR)}{kR} \right) \right) \tag{0.58}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{k} \sin(kR) - \frac{kR \cdot 2R \sin(kR) - (2 - 2\cos(kR)) \cdot R}{k^2 R^2} \right) \tag{0.59}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\left(1 - \cos(kR)\right)}{k^2 R} \tag{0.60}$$

Mit der Doppelwinkelfunktion $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ *ergibt sich schließlich*

$$\cdots = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{kR}{2}\right)}{k^2 R} = \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{kR}{2}\right)}{\left(\frac{kR}{2}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kR}{2}\right) \tag{0.61}$$

2.5. *Setzt man die Funktion* $f(x)$ *in die Definition der Fourier-Transformierten* $\hat{f}(k)$ *ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}kx) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cos(x)\ \mathrm{d}x \tag{0.62}$$

Um dieses Integral berechnen zu können, ersetzen wir zunächst die Kosinusfunktion durch ihre Exponentialdarstellung, fassen die Exponentialfunktionen zusammen und teilen das Integral auf

$$\begin{aligned}
\cdots &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}kx) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{2} \left(\exp(+\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right)\ \mathrm{d}x &(0.63)\\
&= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{i}kx\right) \left(\exp(+\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right)\ \mathrm{d}x &(0.64)\\
&= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{i}(k-1)x\right)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{i}(k+1)x\right)\ \mathrm{d}x &(0.65)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle erinnern wir uns an die Vorlesung wo wir zur Berechnung derartiger Integrale die Argumente der Exponentialfuntionen durch quadratisches Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat umgeschrieben haben

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{i}(k\mp 1)x &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2\mathrm{i}(k\mp 1)x\right) &(0.66)\\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2\mathrm{i}(k\mp 1) + (\mathrm{i}(k\mp 1))^2 - (\mathrm{i}(k\mp 1))^2\right) &(0.67)\\
&= -\frac{1}{2}\left((x + \mathrm{i}(k\mp 1))^2 + (k\mp 1)^2\right) &(0.68)\\
&= -\frac{1}{2}(x + \mathrm{i}(k\mp 1))^2 - \frac{1}{2}(k\mp 1)^2 &(0.69)
\end{aligned}$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cdots = &\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x + \mathrm{i}(k-1))^2 - \frac{1}{2}(k-1)^2\right)\ \mathrm{d}x &(0.70)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x + \mathrm{i}(k+1))^2 - \frac{1}{2}(k+1)^2\right)\ \mathrm{d}x &(0.71)
\end{aligned}$$

Spaltet man die Exponentialfunktionen auf und führt die Variablentransformationen $\tilde{x} := x + \mathrm{i}(k \mp 1)$ durch, so erhält man

$$\ldots = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\,\mathrm{d}\tilde{x} + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k+1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\,\mathrm{d}\tilde{x} \tag{0.72}$$

$$= \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}} + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k+1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\,\mathrm{d}\tilde{x} \tag{0.73}$$

Mit dem aus der Vorlesung vertrauten Gauß-Integral ergibt sich

$$\ldots = \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}} + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(k+1)^2\right)}{\sqrt{8\pi}}\right)\sqrt{2\pi} \tag{0.74}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(k+1)^2\right)\right) \tag{0.75}$$

Ausmultiplizieren der Argumente der Exponentialfunktionen und Ausklammern gemeinsamer Faktoren liefert

$$\ldots = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(k^2 - 2k + 1\right)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k^2 + 2k + 1\right)\right)\right) \tag{0.76}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k^2 + 1\right)\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\exp(+k) + \exp(-k)\right) \tag{0.77}$$

Hier erkennen wir die Exponentialdarstellung des Kosinus Hyperbolicus

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(+x) + \exp(-x)\right) \tag{0.78}$$

und finden damit schlussendlich

$$\ldots = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k^2 + 1\right)\right)\cosh(k) \tag{0.79}$$

2.6. *Setzt man die Funktion $f(x)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(k)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}kx)\,|x|^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{0.80}$$

Bevor wir uns an die Berechnung dieser Fourier-transformierten machen, überlegen wir uns entsprechend des angegebenen Hinweises zunächst für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ das Integral existiert. Für $k = 0$ kollabiert der Exponentialfaktor zu Eins und es verbleibt

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \tag{0.81}$$

Wie unschwer zu erkennen ist divergiert dieses Integral, sodass wir im Folgenden nur die Fourier-Transformierte für $k \neq 0$ berechnen.

An dieser Stelle nutzen wir erneut den Hinweis und untersuchen den Integranden auf etwaige Symmetrieeigenschaften. Dazu schreiben wir zunächst die Exponentialfunktion für $k \neq 0$ wie folgt um

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\cos(kx) - \mathrm{i}\sin(kx)\right) |x|^{-\alpha}\, \mathrm{d}x \tag{0.82}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \cos(kx)\, |x|^{-\alpha}\, \mathrm{d}x - \mathrm{i} \int\limits_{\mathbb{R}} \sin(kx)\, |x|^{-\alpha}\, \mathrm{d}x \right) \tag{0.83}$$

und bemerken, dass die Betragsfunktion sowie die Kosinusfunktion offensichtlich symmetrisch bezüglich der Spiegelung an $x = 0$ sind während die Sinusfunktion antisymmetrisch bezüglich der Spiegelung an $x = 0$ ist. Nachdem der Integrationsbereich aber symmetrisch bezüglich $x = 0$ ist, verschwindet das zweite Integral aus Symmetriegründen und es verbleibt

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(kx)\, |x|^{-\alpha}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(kx)\, x^{-\alpha}\, \mathrm{d}x \tag{0.84}$$

Mit der Variablentransformation $t = kx$ lässt sich dieses Integral schließlich zu

$$\cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(t) \left(\frac{t}{k}\right)^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^{\alpha-1} \int\limits_0^\infty \cos(t)\, t^{-\alpha}\, \mathrm{d}t \tag{0.85}$$

umschreiben.

Aufgabe 3 (Fourier-Transformation II) Wir betrachten die durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

definierte Funktion wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$.

3.1 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ der Funktion $f(t)$.

3.2 Wie lauten für Zeiten $t \geq 0$ die Fourier-Transformierten $\hat{x}(\omega)$ und $\hat{y}(\omega)$ der gedämpften Schwingungen

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t)$$
$$y(t) = \exp(-\lambda t) \sin(\Omega t)$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}$?

Lösung 3 (Fourier-Transformation II).

3.1. *Setzt man die Funktion $f(t)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(\omega)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) f(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) \exp\left(\left(-\lambda + \mathrm{i}a\right) t\right) \,\mathrm{d}t \tag{0.86}$$

An dieser Stelle haben wir verwendet, dass die Funktion f nur für $t \geq 0$ nicht-verschwindende Werte annimmt. Obwohl die Funktion bei $t = 0$ den Wert $1/2$ annimmt, können wir dies getrost ignorieren, da der Punkt $t = 0$ bezüglich der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Nullmenge darstellt. Fasst man die Exponentialfunktionen zusammen und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)\right) t\right) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)\right) t\right)}{-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)\right)}\right]_0^\infty \tag{0.87}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{\exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)\right) T\right) - 1}{-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}(\omega + a)} \tag{0.88}$$

3.2. *Setzt man die Funktionen $f(t)$ in die Definition der Fourier-Transformierten $\hat{f}(\omega)$ ein, so ergibt sich*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) f(t) \,\mathrm{d}t \tag{0.89}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) \exp\left(-\lambda t\right) \begin{cases} \cos(\Omega t) \\ \sin\left(\Omega t\right) \end{cases} \mathrm{d}t \tag{0.90}$$

Fasst man die Exponentialfunktionen zusammen und schreibt die Kosinus- und Sinusfunktion in deren Exponentialdarstellung, so ergibt sich

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}\omega\right) t\right) \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\exp\left(\mathrm{i}\Omega t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\Omega t\right)\right) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp\left(\mathrm{i}\Omega t\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\Omega t\right)\right) \end{cases} \mathrm{d}t \tag{0.91}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega - \Omega)\right) t\right) + \exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + \Omega)\right) t\right)\right) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega - \Omega)\right) t\right) - \exp\left(-\left(\lambda + \mathrm{i}(\omega + \Omega)\right) t\right)\right) \end{cases} \mathrm{d}t \tag{0.92}$$

Hier erkennen wir mit der Identifikation $\mp\Omega \equiv a_\mp$ exakt die Integrale aus der vorausgegangenen Teilaufgabe. Verwendet man das dortige Ergebnis, so finden wir

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + \mathrm{i}(\omega + a_-)} + \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}(\omega + a_+)}\right) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\lambda + \mathrm{i}(\omega + a_-)} - \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}(\omega + a_+)}\right) \end{cases} \tag{0.93}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\lambda + \mathrm{i}\omega) - \mathrm{i}\Omega} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\lambda + \mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}\Omega}\right) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\lambda + \mathrm{i}\omega) - \mathrm{i}\Omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\lambda + \mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}\Omega}\right) \end{cases} \tag{0.94}$$

Macht man den Nenner rational, so finden wir

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{(\lambda+\mathrm{i}\omega)+\mathrm{i}\Omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2} + \frac{(\lambda+\mathrm{i}\omega)-\mathrm{i}\Omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2}\right) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{(\lambda+\mathrm{i}\omega)+\mathrm{i}\Omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2} - \frac{(\lambda+\mathrm{i}\omega)-\mathrm{i}\Omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2}\right) \end{cases} \tag{0.95}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \frac{\lambda+\mathrm{i}\omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2} \\ \frac{\Omega}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^2+\Omega^2} \end{cases} \tag{0.96}$$

Aufgabe 4 (Fourier-Transformation III) Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$\left(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^3 x(t) = s(t)$$

mit der Konstante $\alpha = RC > 0$ und der Eingangsfunktion $s(t)$ beschrieben wird. Die Fourier-Transformierten der Funktionen $x(t)$ und $s(t)$ seien $\hat{x}(\omega)$ und $\hat{s}(\omega)$.

4.1 Welche Eigenschaften muss die Eingangsfunktion $s(t)$ besitzen, damit eine Fourier-Transformation durchgeführt werden kann?

4.2 Formulieren Sie durch Anwendung der Fourier-Transformation die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Frequenzbereich.

4.3 Bestimmen Sie die durch

$$\hat{h}(\omega) := \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{s}(\omega)}$$

definierte Übertragungsfunktion $\hat{h}(\omega)$.

Lösung 4.

4.1. *Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Funktion nur dann eine Fourier-Transformierte besitzt, wenn das Fourier-Integral existiert. Dementsprechend muss die Eingangsfunktion* s *eine* $L^1(\mathbb{R})$*-Funktion sein.*

4.2. *Um die gegebene Differentialgleichung im Frequenzbereich zu formulieren setzen wir die Fourier-Darstellungen der Funktionen* $x(t)$ *und* $s(t)$ *ein*

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right) \hat{x}(\omega) \, \mathrm{d}\omega \tag{0.97}$$

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right) \hat{s}(\omega) \, \mathrm{d}\omega \tag{0.98}$$

und erhalten damit

$$\left(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right) \hat{x}(\omega) \, \mathrm{d}\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right) \hat{s}(\omega) \, \mathrm{d}\omega \tag{0.99}$$

Die linke Seite ergibt dabei

$$\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right) \tag{0.100}$$

$$=\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\alpha\omega\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right) \tag{0.101}$$

$$=\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}\alpha\omega)^2\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\alpha\omega\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right. \tag{0.102}$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\alpha\omega\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right) \tag{0.103}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}\alpha\omega)^3\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}\alpha\omega)^2\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{0.104}$$

$$+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}\alpha\omega)^2\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\alpha\omega\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{0.105}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\alpha\omega\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{0.106}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-\mathrm{i}\alpha^3\omega^2-3\alpha^2\omega^2+3\mathrm{i}\alpha\omega+1\right)\exp\left(+\mathrm{i}\omega t\right)\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{0.107}$$

Setzt man dies in obige Gleichung ein und betrachtet auf beiden Seiten jeweils nur den Integranden so ergibt sich die algebraische Gleichung

$$\left(-\mathrm{i}\alpha^3\omega^2-3\alpha^2\omega^2+3\mathrm{i}\alpha\omega+1\right)\hat{x}(\omega)=\hat{s}(\omega) \tag{0.108}$$

im Frequenzraum.

4.3. *Bildet man den Quotienten* $\hat{h}(\omega)=\frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{s}(\omega)}$ *so findet man für die Übertragungsfunktion*

$$\hat{h}(\omega)=\frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{s}(\omega)}=\frac{1}{-\mathrm{i}\alpha^3\omega^2-3\alpha^2\omega^2+3\mathrm{i}\alpha\omega+1}=\frac{1}{1-3\alpha^2\omega^2+\mathrm{i}\alpha\omega\left(3-\alpha^2\omega^2\right)} \tag{0.109}$$

Aufgabe 5 (Inverse Fourier-Transformierte) Berechnen Sie die inversen Fourier-Transformierten $\check{f}$ der folgenden Funktionen $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.1

$$f(k)=\frac{\exp\left(2\mathrm{i}k\right)}{1+k^2}$$

HINWEIS: Verwenden Sie die Translationseigenschaft der inversen Fourier-Transformierten analog zur Translationseigenschaft der Fourier-Transformierten aus Aufgabe 1.

5.2

$$f(k) = k \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$$

HINWEIS: Versuchen Sie an einer geeigneten Stelle die Funktion $f(k)$ als Ableitung darzustellen.

Lösung 5 (Inverse Fourier-Transformierte)**.**

5.1. *Gemäß dem Hinweis betrachten wir in Aufgabe 1 die Translationseigenschaft der Fourier-Transformierten. Identifiziert man $\hat{g}(k)$ aus Aufgabe 1.3 der gegebenen Funktion $f(k)$, so ergibt sich*

$$\hat{g}(k) = \exp\left(-\mathrm{i}kx_0\right)\hat{f}(k) \quad \Leftrightarrow \qquad f(k) = \exp\left(2\mathrm{i}k\right)\left(1+k^2\right)^{-2} \tag{0.110}$$

Durch Vergleich finden wir $x_0 = -2$ sowie $\hat{f} = \left(1+k^2\right)^{-2}$. Damit reduziert sich die Aufgabe also auf die Berechnung der inversen Fourier-Transformierten von $\left(1+k^2\right)^{-2}$. Aus Aufgabe 2.3 aber wissen wir, dass die Funktion $\exp\left(-|x|\right)$ die Fourier-Transformierte $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+k^2\right)^{-2}$ besitzt woraus wir folgern können, dass die inverse Fourier-Transformierte von $\left(1+k^2\right)^{-2}$ durch

$$\left(\frac{1}{1+k^2}\right)^{\vee} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-|x|\right) \tag{0.111}$$

gegeben ist. Dementsprechend können wir unter Ausnutzung der Translationseigenschaft schlussfolgern, dass die inverse Fourier-Transformierte der gegebenen Funktion $f(k)$ durch

$$\check{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-|x-2|\right) \tag{0.112}$$

gegeben ist.

5.2. *Setzt man die Funktionen $f(k)$ in die Definition der inversen Fourier-Transformierten $\check{f}(x)$ ein, so ergibt sich*

$$\begin{aligned}
\check{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}kx\right) f(k)\,\mathrm{d}k && (0.113)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(+\mathrm{i}kx\right) k \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)\,\mathrm{d}k && (0.114)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}+\mathrm{i}kx\right) k\,\mathrm{d}k && (0.115)
\end{aligned}$$

wobei wir die Exponentialfunktionen zusammengefasst haben. Stellt man an dieser Stelle entsprechend des Hinweises den Integranden gemäß

$$\exp\left(-\frac{k^2}{2} + \mathrm{i}kx\right) k = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(-\frac{k^2}{2} + \mathrm{i}kx\right) \tag{0.116}$$

als Ableitung nach x dar so erhält man

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(-\frac{k^2}{2} + \mathrm{i}kx\right) \,\mathrm{d}k \tag{0.117}$$

Um dieses Integral ausführen zu können, müssen wir abermals durch quadratische Ergänzung ein vollständiges Quadrat erzeugen

$$\begin{aligned} -\frac{k^2}{2} + \mathrm{i}kx &= -\frac{1}{2}\left(k^2 - 2\mathrm{i}kx\right) & (0.118)\\ &= -\frac{1}{2}\left(k^2 - 2\mathrm{i}kx + (\mathrm{i}x)^2 - (\mathrm{i}x)^2\right) & (0.119)\\ &= -\frac{1}{2}\left((k - \mathrm{i}x)^2 + x^2\right) & (0.120)\\ &= -\frac{1}{2}(k - \mathrm{i}x)^2 - \frac{x^2}{2} & (0.121) \end{aligned}$$

Setzt man dies ein und zieht die Ableitung nach x nach außen so verbleibt

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(k - \mathrm{i}x)^2 - \frac{x^2}{2}\right) \,\mathrm{d}k \tag{0.122}$$

Mit der Variablentransformation $\tilde{k} := k - \mathrm{i}x$ lässt sich das Integral leicht berechnen und wir finden schließlich

$$\begin{aligned} \ldots &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{k}^2 - \frac{x^2}{2}\right) \,\mathrm{d}\tilde{k} & (0.123)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{k}^2\right) \,\mathrm{d}\tilde{k}\right) & (0.124)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sqrt{2\pi}\right) & (0.125)\\ &= +\mathrm{i}x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & (0.126) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Eigenschaften der Faltung) Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften der Faltung für Funktionen $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

6.1 Kommutativität

$$f * g = g * f$$

6.2 Assoziativität

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

6.3 Distributivität

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

Lösung 6 (Eigenschaften der Faltung)**.**

6.1.

Der Beweis der Kommutativität der Faltung ergibt sich mit Variablentransformation $\tilde{y} := x - y$ unter Verwendung des Transformationssatzes aus deren Definition

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}^n y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{y})g(x-\tilde{y}) \, \left|\det\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}\right)\right| \mathrm{d}^n \tilde{y} \tag{0.127}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{y})g(x-\tilde{y}) \, \left|\det\left(-\mathbb{1}_{n\times n}\right)\right| \mathrm{d}^n \tilde{y} \tag{0.128}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{y})g(x-\tilde{y}) \, |-1| \, \mathrm{d}^n \tilde{y} = (g * f)(x) \tag{0.129}$$

6.2.

Auch zum Beweis der Assoziativität der Faltung starten wir ausgehend von der Definition der Faltung

$$((f * g) * h)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x-y)h(y)\, \mathrm{d}^n y \tag{0.130}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f((x-y)-z)g(z)\, \mathrm{d}^n z \right) h(y)\, \mathrm{d}^n y \tag{0.131}$$

Vergleicht dies mit dem Ausdruck für $f * (g * h)$

$$(f * (g * h))(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\tilde{y})\,(g * h)(\tilde{y})\, \mathrm{d}^n \tilde{y} \tag{0.132}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\tilde{y}) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\tilde{y}-\tilde{z})h(\tilde{z})\, \mathrm{d}^n \tilde{z} \right) \mathrm{d}^n \tilde{y} \tag{0.133}$$

so bietet es sich an, zunächst die Rolle der Integrationsvariablen $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ zu vertauschen

$$\ldots = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\tilde{z}) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\tilde{z}-\tilde{y})h(\tilde{y})\, \mathrm{d}^n \tilde{y} \right) \mathrm{d}^n \tilde{z} \tag{0.134}$$

Nachdem mit g und h auch die Faltung $g * h$ wieder eine $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist, konvergieren die Integrale und wir dürfen diese vertauschen. Damit ergibt sich

$$\ldots = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - \tilde{z}) g(\tilde{z} - \tilde{y}) \, \mathrm{d}^n \tilde{z} \right) h(\tilde{y}) \, \mathrm{d}^n \tilde{y} \tag{0.135}$$

Definieren wir nun simultan $\tilde{y} = y$ und $\tilde{z} := y + z$ und verwendet dabei $\mathrm{d}^n \tilde{y} = \mathrm{d}^n y$ sowie $\mathrm{d}^n \tilde{z} = \mathrm{d}^n z$ so ergibt sich

$$\ldots = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - (y + z)) g(z) \, \mathrm{d}^n z \right) h(y) \, \mathrm{d}^n y \tag{0.136}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f((x - y) - z) g(z) \, \mathrm{d}^n z \right) h(y) \, \mathrm{d}^n y \tag{0.137}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y) h(y) \, \mathrm{d}^n y \tag{0.138}$$

$$= ((f * g) * h)(x) \tag{0.139}$$

6.3. *Trivial.*

Aufgabe 7 (Faltung) Wir betrachten durch

$$s(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

definierte, 2π-periodische Sägezahnfunktion wobei $x \in [0, 2\pi)$.

7.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(f * f)(x)$ einer T-periodischen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wiederum T-periodisch ist.

7.2 Berechnen Sie die durch

$$(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x - y) s(y) \, \mathrm{d}y$$

definierte periodische Faltung für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung 7.

7.1. *Um zu zeigen, dass die Faltung $(f * f)(x)$ einer periodischen Funktion f mit der Periode T wiederum T-periodisch ist, setzen wir die Funktion f in die Definition der Faltung ein*

$$(f * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{x_0}^{x_0 + T} f(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y \tag{0.140}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Funktion T-periodisch ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Funktion f nur im Intervall $[x_0, x_0 + T]$ nicht-verschwindende Werte annimmt. Ist $(f * f)(x)$ periodisch, so muss gelten

$$(f * f)(x + T) \stackrel{!}{=} (f * f)(x) \tag{0.141}$$

Berechnen wir $(f * f)(x + T)$ mit dem obigen Faltungsintegral so finden wir

$$(f * f)(x + T) = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x + T - y)f(y)\, \mathrm{d}y \tag{0.142}$$

Nachdem aber die Funktion f selbst T-periodisch ist, vereinfacht sich dieser Ausdruck und wir finden das erwartete Ergebnis

$$\cdots = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x - y)f(y)\, \mathrm{d}y = (f * f)(x) \tag{0.143}$$

7.2. *Analog zur ersten Teilaufgabe berechnen wir das Faltungsintegral wiederum nur auf dem Intervall $[x_0, x_0 + 2\pi]$ wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ setzen können. Es ergibt sich laut Definition*

$$(s * s)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} s(x - y)s(y)\, \mathrm{d}y \tag{0.144}$$

An dieser Stelle müssen wir kurz pausieren und uns überlegen, ob wir nun einfach die gegebene Funktion s einsetzen dürfen und den Integrationsbereich auf das Intervall $[0, 2\pi]$ beschränken können. Betrachten wir im Integranden den Faktor $s(x-y)$ so ist unschwer zu erkennen, dass dieser nur für $x - y \in [0, 2\pi)$ definiert ist. Wählt man beispielsweise $x = \pi$ so ist dieser Faktor nicht von unserer Definition abgedeckt. Nachdem die Funktion s aber als 2π-periodisch angenommen wird, lautet die Funktionsgleichung für s auf dem Intervall $[-2\pi, 0)$

$$s(x) = -\frac{x + \pi}{2} \tag{0.145}$$

Damit können wir das Faltungsintegral für $x \in [0, 2\pi)$ wie folgt berechnen

$$(s * s)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} s(x - y)s(y)\, \mathrm{d}y \tag{0.146}$$

$$= \int\limits_{0}^{x} s(x - y)s(y)\, \mathrm{d}y + \int\limits_{x}^{2\pi} s(x - y)s(y)\, \mathrm{d}y \tag{0.147}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int\limits_{0}^{x} (\pi - (x - y))(\pi - y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{x}^{2\pi} (-(x - y + \pi))(\pi - y)\ \mathrm{d}y\right) \tag{0.148}$$

wobei wir für den Faktor $s(x-y)$ im zweiten Integral die Funktionsgleichung für s auf dem Intervall $[-2\pi, 0)$ eingesetzt haben. Nach einigem Rechnen ergibt sich

$$\cdots = -\pi x^2 + 2\pi^2 x - \frac{2}{3}\pi^3 = -\pi\left(x^2 - 2\pi x + \frac{2}{3}\pi^2\right) \tag{0.149}$$

Wie sich leicht überprüfen lässt, ist diese Funktion tatsächlich wiederum 2π-periodisch

$$\begin{aligned}
(s * s)\left(x_0 + 2\pi\right) &= -\pi\left(\left(x_0 + 2\pi\right)^2 - 2\pi\left(x_0 + 2\pi\right) + \frac{2}{3}\pi^2\right) && (0.150)\\
&= -\pi\left(x_0^2 + 4\pi x_0 + 4\pi^2 - 2\pi x_0 - 4\pi^2 + \frac{2}{3}\pi^2\right) && (0.151)\\
&= -\pi\left(x_0^2 + 2\pi x_0 + \frac{2}{3}\pi^2\right) && (0.152)
\end{aligned}$$