Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Fourier-Transformation und Faltung

Autor: Maximilian Jokel, Benjamin Rüth

Stand: 10. März 2016

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Fourier-Transformation) Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften der Fourier-Transformation für Funktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

1.1 Homogenität

$$\widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C}$$

1.2 Linearität

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$$

1.3 Translation (Verschiebung im Ortsraum)

$$g(x) := f(x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x_0\right) \hat{f}(k)$$

1.4 Modulation (Verschiebung im Frequenzraum)

$$g(x) := \exp\left(+\mathrm{i}k_0 \cdot x\right) f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \hat{f}(k - k_0)$$

1.5 Skalierung

$$g(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{g}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$$

Aufgabe 2 (Fourier-Transformation I) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten $\hat{f}$ der folgenden Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

2.1

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

HINWEIS: Diese Aufgabe lässt sich auf zwei unterschiedlichen Wegen lösen. Versuchen Sie beide Lösungswege zu ergründen.

2.2

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

HINWEIS: Auch diese Aufgabe lässt sich auf zwei unterschiedlichen Wegen lösen. Versuchen Sie wiederum beide Lösungswege zu ergründen.

2.3

$$f(x) = \exp\left(-|x|\right)$$

2.4

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{R} & \text{für } |x| < R \\ 0 & \text{für } |x| \geq R \end{cases}$$

2.5

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cos(x)$$

HINWEIS: Lösen Sie dieses Integral zunächst explizit unter Zuhilfenahme der auch in der Vorlesung verwendeten Technik und anschließend unter Ausnutzung der Eigenschaften der Fourier-Transformation.

2.6

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

HINWEIS: Überlegen Sie sich zunächst für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ das Fourier-Integral existiert und berechnen Sie dieses anschließend unter Ausnutzung seiner Symmetrieeigenschaften.

Aufgabe 3 (Fourier-Transformation II) Wir betrachten die durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

definierte Funktion wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$.

3.1 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ der Funktion $f(t)$.

3.2 Wie lauten für Zeiten $t \geq 0$ die Fourier-Transformierten $\hat{x}(\omega)$ und $\hat{y}(\omega)$ der gedämpften Schwingungen

$$x(t) = \exp(-\lambda t)\cos(\Omega t)$$
$$y(t) = \exp(-\lambda t)\sin(\Omega t)$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 4 (Fourier-Transformation III) Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^3 x(t) = s(t)$$

mit der Konstante $\alpha = RC > 0$ und der Eingangsfunktion $s(t)$ beschrieben wird. Die Fourier-Transformierten der Funktionen $x(t)$ und $s(t)$ seien $\hat{x}(\omega)$ und $\hat{s}(\omega)$.

4.1 Welche Eigenschaften muss die Eingangsfunktion $s(t)$ besitzen, damit eine Fourier-Transformation durchgeführt werden kann?

4.2 Formulieren Sie durch Anwendung der Fourier-Transformation die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Frequenzbereich.

4.3 Bestimmen Sie die durch

$$\hat{h}(\omega) := \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{s}(\omega)}$$

definierte Übertragungsfunktion $\hat{h}(\omega)$.

Aufgabe 5 (Inverse Fourier-Transformierte) Berechnen Sie die inversen Fourier-Transformierten $\check{f}$ der folgenden Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.1

$$f(k) = \frac{\exp(2\mathrm{i}k)}{1+k^2}$$

HINWEIS: Verwenden Sie die Translationseigenschaft der inversen Fourier-Transformierten analog zur Translationseigenschaft der Fourier-Transformierten aus Aufgabe 1.

5.2

$$f(k) = k \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$$

HINWEIS: Versuchen Sie an einer geeigneten Stelle die Funktion $f(k)$ als Ableitung darzustellen.

Aufgabe 6 (Eigenschaften der Faltung) Beweisen Sie die folgenden in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften der Faltung für Funktionen $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

6.1 Kommutativität

$$f * g = g * f$$

6.2 Assoziativität

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

6.3 Distributivität

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

Aufgabe 7 (Faltung) Wir betrachten durch

$$s(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

definierte, 2π-periodische Sägezahnfunktion wobei $x \in [0, 2\pi)$.

7.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(f * f)(x)$ einer T-periodischen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wiederum T-periodisch ist.

7.2 Berechnen Sie die durch

$$(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-y)s(y)\,\mathrm{d}y$$

definierte periodische Faltung für $x \in \mathbb{R}$.