Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth, Maximilian Jokel
Stand: 8. März 2016

Aufgabe 1 (Laurentreihe) Entwickeln Sie die Funktion

$$\frac{-z^2 - z + 4}{z^3 - 3z^2 - z + 3}$$

in Laurentreihen. Wie viele solcher Reihen gibt es und in welchen Gebieten sind sie jeweils gültig? Bestimmen Sie für jeden Fall die Koeffizienten der Reihe.Bestimmen Sie ferner die Residuen der Funktion in den Polen.

Aufgabe 2 (Laurentreihe) Man gebe für $f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$ alle möglichen Entwicklungen nach Potenzen von $z + i$ an. Welche Darstellung konvergiert für $z = 1/2$?

Aufgabe 3 (Laurentreihe) Man berechne die Laurentreihen von

3.1 $\cosh \frac{1}{z^2}$ um $z = 0$

3.2 $\frac{1}{1 - \cos z}$ für $0 < |z| < 2\pi$ um $z = 0$ (es reichen die ersten Summanden ungleich 0)

3.3 $\frac{e^z}{z-1}$ um $z = 1$

Aufgabe 4 (Laurentreihe) Bestimmen Sie jeweils die Laurentreihen von $f(z)$ mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und geben Sie die Konvergenzgebiete an:

4.1 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$

4.2 $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$

Aufgabe 5 (Laurentreihe) Die rationale Funktion f besitze um $z = 0$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

mit Konvergenzradius 1. Bestimmen Sie

$$\mathrm{Res}_{z=1}\left(f(z)\right).$$

Tipp: Versuchen Sie die angegebene, unendliche Laurentreihe mithilfe der geometrischen Reihe in eine endliche Summe umzuwandeln.

Aufgabe 6 (Singularitäten und Residuen) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f(z)$ Lage und Art der isolierten Singularitäten sowie die zugehörigen Residuen:

6.1 $f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 16}$

6.2 $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^n}$

6.3 $f(z) = \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$

6.4 $f(z) = \frac{1}{\cos {}^1\!/_z}$

6.5 $f(z) = \frac{z^4 + 18z^2 + 9}{4z(z^2+9)}$

6.6 $f(z) = \frac{z}{\sin z}$

Aufgabe 7 (Residuensatz) Berechnen Sie für

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

7.1 $\operatorname{Res}_{z_0=1}(f)$ zuerst durch explizite Integration, mithilfe der Formel für Brüche ($\operatorname{Res}_{z_0}({}^g\!/_h) = {}^{g(z_0)}\!/_{h'(z_0)}$) und zuletzt mithilfe der Laurentreihe von $f(z)$ (Konvergenzbereich beachten!).

7.2 das Integral

$$\oint\limits_{|z-1|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

mithilfe des Residuensatzes und der Cauchy'schen Integralformel.

Aufgabe 8 (Residuensatz) Berechnen Sie die folgenden Integrale für $\gamma(\phi) = \frac{2}{3}e^{i\phi} + \frac{1}{2},\ \phi \in [0; 2\pi]$.

8.1

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$$

8.2

$$\int_\gamma \cot \pi z \mathrm{d}z$$

8.3

$$\int_\gamma \frac{1}{z \sin \pi z}\mathrm{d}z$$

Aufgabe 9 (Resiudenkalkül) Man berechne die folgenden Integrale:

9.1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$

9.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+3\sin t}$

9.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$

9.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\mathrm{d}x$

Aufgabe 10 (Residuensatz) Man bestimme für die Funktion $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}-1}-1}{z-1}$

10.1 Lage und Art der Singularitäten in $\mathbb{C}$

10.2 den Wert von

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z$$

Aufgabe 11 (Fourierintegral, Klausuraufgabe 13/14) Sei $f(x) = \frac{x}{x^2+c^2}$ mit $c > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale

11.1

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x$$

11.2

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x$$

11.3

$$I_3 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+c^2}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 12 (Residuenkalkül, Klausuraufgabe 12/13) Sei $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ mit $0 < \alpha < 1$.

12.1 Berechnen Sie das Residuum von $f(z)$ bei $z = i\pi$.

12.2 Welchen Wert hat $\int\limits_{\partial Q} f(z)\mathrm{d}z$ für

$$Q_R = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-R, R], y \in [0, 2\pi]\}, R > 0$$

12.3 Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

HINWEIS: Benutzen Sie, dass $|f(x+iy)| \leq \frac{e^{\alpha z}}{|1-e^z|} \to 0$ für $|x| \to \infty$.