Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Integralsätze und Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth, Maximilian Jokel

Stand: 7. März 2016

Aufgabe 1 (Zylinder) Gegeben sei der Zylinder Z der Höhe $h > 0$ über dem in der x-y-Ebene gelegenen Kreis mit Radius $R > 0$ um den Ursprung.

1.1 Beschreiben Sie den Zylindermantel von Z in geeigneten Koordinaten.

1.2 Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{v}$ durch die Mantelfläche von Z von innen nach außen, wobei

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^\top \mapsto (xz + y, yz - x, z)^T .$$

Lösung:

(.1) Es bezeichne M die Mantelfläche des Zylinders Z. Zur Beschreibung von M bietet sich die Abbildung

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v)^\top \mapsto (R \cos u, R \sin u, v)^\top$$

an. Wir schreiben also

$$M = \left\{ (R \cos u, R \sin u, v)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v)^\top \in D \right\} ,$$

wobei $D = [0, 2\pi] \times [0, h]$.

(.2) Der Fluss des Vektorfelds $\mathbf{v}$ durch die Mantelfläche M von Z von innen nach außen ist das vektorielle Flächenintegral von $\mathbf{v}$ über M, wobei $\phi_u \times \phi_v$ nach außen zeigt:

$$\iint_M \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s = \iint_D \mathbf{v}(\phi(u, v))^\top (\phi_u \times \phi_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v .$$

Wir berechnen

$$\phi_u = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass $\phi_u \times \phi_v$ nach außen zeigt (wäre das nun nicht der Fall, so würde man $\phi_v \times \phi_u$ wählen; hierbei wird die Orientierung umgedreht). Damit erhalten wir:

$$\iint_M \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R\, v\, \cos u + R \sin u \\ R\, v\, \sin u - R \cos u \\ v \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = R^2 h^2 \pi .$$

Aufgabe 2 (Fluss, Klausuraufgabe 15/16) Sei $\Phi : V \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte der Mannigfaltigkeit $M = \Phi(V)$, wobei $V = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1 \right\}$ und $\Phi(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2} \right)^T$.

2.1 Wie lautet die Gramsche Determinante $g^{\Phi}(u,v)$ von Φ bei $(u,v) \in V$?

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

2.3 Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (1,0,0)^T$ durch die Oberfläche M. Die Orientierung der Fläche ist durch $n(0,0,0) = (0,0,1)^T$ festgelegt. Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis: Berechnen Sie den Fluss einmal durch explizites Ausrechnen und einmal unter Zuhilfenahme des Gaußschen Integralsatzes.)

Lösung:
(.1)

$$g^{\Phi}(u,v) = \det\left(\mathrm{D}\Phi(u,v)^T \mathrm{D}\Phi(u,v)\right) \overset{\text{hier}}{=} ||\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi||_2 = |(-u,-v,1)| = u^2 + v^2 + 1$$

(.2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_2(M) &= \int\limits_M \mathrm{d}S = \int\limits_V \sqrt{g^{\Phi}(u,v)}\,\mathrm{d}(u,v) = \int\limits_{u^2+v^2<1} \sqrt{u^2+v^2+1}\,\mathrm{d}(u,v) \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+1} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 2\pi \left[\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

(.3)
1.Möglichkeit: Satz von Gauß
Wir erhalten die geschlossene Oberfläche $\partial A = M \cup D$, die

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z \in (0, \Phi(x,y))\right\}$$

indem wir den Deckel

$$D = \left\{(x,y,\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$$

einführen. Nach dem Satz von Gauß gilt für den Fluß F durch M

$$F = \int\limits_M \langle f(x), n(x)\rangle \,\mathrm{d}S = \int\limits_A \mathrm{div}\,(v)\,\mathrm{d}V - \int\limits_D \langle f(x), n(x)\rangle\,\mathrm{d}S = 0 - 0 = 0,$$

2.Möglichkeit: Direktes Ausrechnen
Es gilt $\partial_u \Phi(0,0) \times \partial_v \Phi(0,0) = (0,0,1) = -n$, wir müssen also die Richtung der Normalen

umkehren.

$$
\begin{aligned}
F = \int_M \langle v(x), n(x) \rangle \, \mathrm{d}S &= -\int_V \langle f\left(\Phi(u,v)\right), \partial_u \Phi\left(u,v\right) \times \partial_v \Phi\left(u,v\right) \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= -\int_V \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\phi) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (Torus) Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$
T : [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi \\ \varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}
$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

3.1 den Oberflächeninhalt des Torus $T_R^r := T([0,r] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi])$ mit $r \in [0,R]$,

3.2 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r direkt,

3.3 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des **Satzes von Gauß**.

Lösung: (.1) Die Oberfläche von T_R^r wird beschrieben durch die Parametrisierung

$$
x : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad x(\varphi,\vartheta) = T(r,\varphi,\vartheta).
$$

Wir berechnen

$$
x_\varphi = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\vartheta)\sin\varphi \\ (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_\vartheta = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}
$$

und daraus

$$
x_\varphi \times x_\vartheta = r(R + r\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |x_\varphi \times x_\vartheta| = r(R + r\cos\vartheta).
$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Flächeninhalt $F(M)$ der Torusoberfläche M:

$$F(M) = \iint_M 1\,\mathrm{d}O = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi r\big[R\vartheta + r\sin\vartheta\big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 Rr.$$

(.2) Der Fluß des Vektorfelds $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche M von T_R^r läßt sich mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung berechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_M v\,\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x(\varphi,\vartheta))^T(x_\varphi \times x_\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\left(Rr + (R^2+r^2)\cos\vartheta + Rr\cos^2\vartheta\right)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi r\big[Rr\vartheta + (R^2+r^2)\sin\vartheta + Rr\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4}\right)\big]_0^{2\pi} = 6\pi^2 Rr^2.
\end{aligned}$$

(.3)Für die Integration von $\cos^2\vartheta$ verwenden wir die Formelsammlung. Für das Vektorfeld v gilt $\mathrm{div}(v) = 3$. Daher erhalten wir für den Fluß von v durch die Oberfläche M des Torus T_R^r mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\iint_M v\,\mathrm{d}O &= \iiint_{T_R^r} \mathrm{div}(v)\,\mathrm{d}V = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 3\cdot|\det J_x(\varrho,\varphi,\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho \\
&= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 3\varrho(R + \varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho = 3\int_0^r\int_0^{2\pi}[\varrho R\vartheta + \varrho^2\sin\vartheta]_{\vartheta=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho \\
&= 12\pi^2 R\int_0^r \varrho\,\mathrm{d}\varrho = 6\pi^2 Rr^2\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma\,,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$.

Lösung: Auf herkömmlichem Wege müßten wir uns jetzt mit sechs Flächenintegralen herumschlagen, je eines für jede Würfelseite. Auch wenn es nicht schwer wäre, die Flächen zu parametrisieren und die Normalenvektoren zu ermitteln, wäre das Berechnen von sechs Doppelintegralen doch ein beachtlicher Aufwand. Versuchen wir es stattdessen lieber mit dem Satz von Gauß.

Unser Vektorfeld ist ja

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix}\,,$$

seine Divergenz ergibt sich also zu

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{y^2+z^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - e^y) = 2x + 2y + 2z\,.$$

Mit dem Satz von Gauß haben wir jetzt also nur noch ein Volumenintegral zu ermitteln:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W (2x + 2y + 2z)\ dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 1)\ dx\, dy \\ &= \int_0^1 (2x + 2)\ dx = 3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\iint_B \Delta u\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle\ \mathrm{d}s\,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

Lösung: Zuerst berechne man die benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 5x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 5y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 15x^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 15y^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

und somit ist

$$\Delta u = 15(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 10(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 25(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Der nach außen deutende Normalenvektor von ∂B ist

$$n(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}\,,$$

womit sich das folgende Skalarprodukt ergibt:

$$\langle \nabla u,\, n\rangle = \begin{pmatrix} 5x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \\ 5y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = 5(x^2+y^2)^2 \,.$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie von B bietet sich zur Berechnung der Integrale eine Transformation in Polarkoordinaten an. Für das Bereichsintegral erhält man

$$\iint_B \Delta u \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} 25r^3\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 50\pi \int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = 10\pi R^5.$$

Der Rand von B lässt sich in Polarkoordinaten einfach parametrisieren. Für den Kreisbogen gilt $s = R\varphi$ und somit ergibt sich für das Randintegral

$$\oint_{\partial B} \langle \nabla u, n\rangle \;\mathrm{d}s = \oint_{\partial B} 5(x^2+y^2)^2 \;\mathrm{d}s = 5\oint_{\partial B} r^4 \;\mathrm{d}s = 5R^5 \int_0^{2\pi} \;\mathrm{d}\phi = 10\pi R^5.$$

Damit ist der Satz von Gauß für dieses Beispiel verifiziert.

Aufgabe 6 (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_\phi \mathbf{v}\cdot\,\mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

Lösung: Das durch die Flächen definierte Gebiet B hat die Form eines Tunnels mit parabelförmigem Querschnitt, welcher sich entlang der x-Achse erstreckt. Die x-y-Ebene bildet den Boden des Tunnels der bei $x = 0$ anfängt und bei $x = 3$ endet. Präzise formuliert handelt es sich um das dreidimensionale Normalgebiet

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 3,\; -2 \le y \le 2,\; 0 \le z \le 4 - y^2\}\,.$$

Wendet man den Divergenzsatz von Gauß auf das Oberflächenintegral an, d. h.

$$\iint_\phi \mathbf{v}\cdot\,\mathrm{d}s = \iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{v})\;\mathrm{d}V\,,$$

so erhält man ein Volumenintegral welches sich bezüglich dieses Normalgebiets wie folgt berechnet

$$\iiint_\Gamma \operatorname{div}(\mathbf{v})\ \mathrm{d}V = \iiint_\Gamma (2-x)\ \mathrm{d}V = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} (2-x)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 (2z - xz)\Big|_0^{4-y^2}\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\int_{-2}^2 (2-x)(4-y^2)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^3 (2-x)(4y - \tfrac{1}{3}y^3)\Big|_{-2}^2\ \mathrm{d}x = \tfrac{32}{3} \int_0^3 (2-x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{32}{3}\ (2x - \tfrac{1}{2}x^2)\Big|_0^3 = 16\,.$$

Aufgabe 7 (Satz von Green) Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

Lösung: Es sei dazu

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^\top \quad \text{und} \quad \phi \subseteq \{(x, y, 0)^\top \mid x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Es gilt dann $\phi_u \times \phi_v = (0,\,0,\,1)^\top$ (nach entsprechender Wahl von u und v). Nach dem Satz von Stokes gilt dann

$$\int_{\partial\phi} v \cdot \mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot}(()\,v) \cdot \mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot}(()\,v)^\top (\phi_u \times \phi_v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_\phi \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Aufgabe 8 (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, das zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Lösung: Auf einer stückweise regulären, orientierbaren Fläche S mit positiv umlaufenem Rand ∂S gilt für ein in einer Umgebung von S stetig differenzierbares Vektorfeld v der Satz von Stokes:

$$\oint_{\partial S} v^T\,\mathrm{d}x = \iint_S \operatorname{rot} v^T\,\mathrm{d}O.$$

In unserem Beispiel ist S der Kegelmantel $M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 0 \le x_3 \le 1\}$ mit Rand $\partial M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 1\}$ (Skizze!).

Um den Satz von Stokes für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ zu verifizieren, benötigen wir noch Parametrisierungen von M und ∂M.

Mit Blick auf die Skizze beschreiben wir M durch die Abbildung

$$x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad x(z, \varphi) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, z)^T$$

mit $x_z \times x_\varphi = (-z\cos\varphi, -z\sin\varphi, z)^T$. Achtung: ∂M ist positiv bezglich der nach oben gerichteten Flächennormalen $x_z \times x_\varphi$ von M zu parametrisieren. Man überlege sich anhand der Skizze, dass

$$k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad k(t) = (\cos t, \sin t, 1)^T$$

eine positive Parametrisierung von ∂M liefert!

Für die linke Seite im Satz von Stokes erhalten wir folglich

$$\oint_{\partial S} v^T \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} v(k(t))^T \dot{k}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = 0.$$

Für die rechte Seite im Satz von Stokes gilt ebenso

$$\iint_S \operatorname{rot} v^T \,\mathrm{d}O = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -z^2(\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^1 -z^2\big[\sin\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{2}\big]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}z = 0,$$

wobei wir den Ausdruck $\cos\varphi\sin\varphi$ mittels Formelsammlung integrieren. Somit ist die Aussage des Satzes von Stokes für unser Beispiel bestätigt.

Aufgabe 9 (Satz von Green) Man verifiziere für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)^\top$ und das Gebiet B, das durch $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird, den Satz von Green.

Lösung: Die beiden Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ schneiden sich in $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Das Kurvenintegral entlang des Randes muss entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Entlang der Kurve $x = t$, $y = t^2$, $t \in [0, 1]$, erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big[(2x(t)y(t) - x(t)^2)\dot{x}(t) + (x(t) + y(t)^2)\dot{y}(t)\big]\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 [2t^3 - t^2 + (t + t^4)2t]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [2t^3 + t^2 + 2t^5]\mathrm{d}t = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

und entlang der Kurve $x = (1 - t)^2$, $y = 1 - t$ $(t \in [0, 1])$ das Integral

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \big[((2x(t)y(t) - x(t)^2)\dot{x}(t) + (x(t) + y(t)^2)\dot{y}(t)\big]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big[(2(1 - t)^3 - (1 - t)^4)(-2)(1 - t) - 2(1 - t)^2\big]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big[2(1 - t)^5 - 4(1 - t)^4 - 2(1 - t)^2\big]\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{3}(1 - t)^6 + \tfrac{4}{5}(1 - t)^5 + \tfrac{2}{3}(1 - t)^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{17}{15}\,.\end{aligned}$$

Somit ergibt das gesamte Kurvenintegral $\frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$.

Der Satz von Green behauptet nun die Identität dieses Kurvenintegrals mit dem Gebietsintegral

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_B (1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Um dieses Integral zu berechnen, beschreiben wir B als Normalbereich:

$$B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}\,.$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\begin{aligned}\int_B (1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left.(y-2xy)\right|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3)\mathrm{d}x = \left.\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4\right|_0^1 = \tfrac{1}{30}\,,\end{aligned}$$

womit der Satz von Green bestätigt ist.

Aufgabe 10 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_\phi \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial\phi} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

Lösung: Das Kurvenintegral: Der Rand γ von ϕ ist der Kreis $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 4,\ z = 2\}$. Hierfür findet man die Parametrisierung

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich darauf geachtet haben, dass die Raumkurve bzgl. dem angegebenen Normalenvektor positiv orientiert ist. Somit erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin t \\ -4\cos t \\ -8\sin t \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -2\sin t \\ -2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(12\sin^2 t + 8\cos^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8 + 4\sin^2 t\right) \mathrm{d}t = 20\pi.\end{aligned}$$

Das Flächenintegral: Die Rotation des Vektorfelds $\mathbf{v}$ beträgt

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} z^2 + x \\ 0 \\ -z - 3 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion der Fläche ϕ und der Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ lauten

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2+v^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{1+u^2+v^2}\,,$$

wobei wir uns vor der Angabe des Definitionsbereichs D von ϕ noch drücken, da wir das entstehende Integral natürlich vorteilhaft in Polarkoordinaten auswerten werden; hierbei wird der Definitionsbereich zu einem *Rechteck* B. Übrigens müssen wir die Reihenfolge von u und v noch vertauschen, da der bisherige Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ eine positive z-Komponente hat. Mit $\phi_v \times \phi_u$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint_\phi \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \,\mathrm{d}s = \iint_\phi \mathbf{w} \cdot \,\mathrm{d}s &= \iint_D \mathbf{w}(\phi(u,v))^\top (\phi_v \times \phi_u)\, \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(u^2+v^2)^2 + u \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \frac{1}{4}u(u^2+v^2)^2 + u^2 + \frac{1}{2}(u^2+v^2) + 3 \, \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^5 \cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}r^2 + 3 \,\mathrm{d}\phi\, r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \pi r^3 + \pi r^3 + 6\pi r \,\mathrm{d}r = \tfrac{\pi}{2}r^4 + 3\pi r^2 \Big|_0^2 = 20\pi\,.
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz von Stokes in diesem Fall verifiziert.

Aufgabe 11 (Satz von Stokes) Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v}$ und die Fläche ϕ

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix},\ \varphi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\,.$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral $\iint_\phi \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \,\mathrm{d}s$.

Lösung: Offensichtlich handelt es sich bei der parametrisierten Fläche um ein Segment der Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, d. h., $\phi = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Vergleiche hierzu die Darstellung einer Sphäre in Polarkoordinaten. Der Rand der Fläche ϕ ist der Kreis γ mit Parameterdarstellung

$$\gamma(\varphi) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Nun kann man den Satz von Stokes

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \,\mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \,\mathrm{d}s$$

anwenden und das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos^2\varphi\right) \mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\phi = \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Man beachte, dass gemäß unserer Orientierung wir den Fluss *von innen nach außen* berechnet haben.

Aufgabe 12 (Komplexes Rechnen) Man berechne:

12.1

$$e^{2+\frac{i\pi}{6}}$$

12.2

$$\cosh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

12.3

$$\sinh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

12.4

$$\cos(1+2i)$$

12.5

$$\operatorname{Re}(z) \ \text{ ohne Verwendung von } \operatorname{Re}(\ )$$

12.6

$$\operatorname{Im}(z) \ \text{ ohne Verwendung von } \operatorname{Im}(\ )$$

Lösung: (.1)Es gilt

$$e^{2+i\frac{\pi}{6}} = e^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}e^2 + i\frac{1}{2}e^2$$

(.2)Es gilt

$$\cosh(it) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos(t)$$

(.3)Es gilt

$$\sinh(it) = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \sin(t)$$

(.4)Die Additionstheoreme der sin- und cos-Funktionen gelten auch für komplexe Argumente. Somit gilt

$$\cos(1+2i) = \cos(1)\cos(2i) - \sin(1)\sin(2i) = \cos(1)\cosh(2) - i\sin(1)\sinh(2)$$

(.5)

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

(.6)

$$\frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

Aufgabe 13 (Holomorphe Funktionen) Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \bar{z} \text{ und } g(z) = z^2$$

Diese beiden Funktionen sind auf Holomorphie zu untersuchen. Geben Sie ferner jeweils ein passendes Wegintegral (mit Parametrisierung des verwendeten Weges!) welches die Holomorphie der Funktion belegt oder widerlegt. Kann man für holomorphe Funktionen zeigen, dass das Wegintegral für **alle** geschlossenen Wege verschwindet?

Lösung: Um die Holomorphie der gegebenen Funktionen zu untersuchen verwenden wir die Cauchy-Riemannschen DG:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wir beginnen mit f. Dazu müssen wir die Funktion entsprechend umformen:

$$f(z) = \bar{z} \leftrightarrow f(x+iy) = x - iy$$

$$\begin{array}{rcc} u(x,y) = x & \frac{\partial u}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v(x,y) = -y & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{array}$$

Die Cauchy-Riemannschen DG sind nicht erfüllt, da $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$. Wir verwenden den Weg $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0;1]$ um zu zeigen, dass f nicht holomorph ist, da das Integral über f für geschlossene Wege nicht null wird.

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{-2\pi i t} 2\pi i e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 i\pi\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Für g gehen wir identisch vor.

$$g(z) = z^2 \leftrightarrow g(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{aligned} u(x,y) = x^2 - y^2 \quad & \tfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ v(x,y) = 2xy \quad & \tfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen DG sind erfüllt. Für den Weg γ aus der ersten Teilaufgabe erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 e^{4\pi i t} 2\pi i e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t = 2\pi i \int_0^1 e^{6\pi i t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i \int_0^1 \cos(6\pi t) + i\sin(6\pi t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Für g existiert eine Stammfunktion $G(z) = \frac{1}{3}z^3$. Das Integral lässt sich also schreiben als

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = 0$$

weil $\gamma(1) = \gamma(0)$, da es sich um einen geschlossenen Weg handelt.

Aufgabe 14 (Holomorphe Funktionen) Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

14.1

$$f(z) = z^3$$

14.2

$$f(z) = z\mathrm{Re}\left(()\, z\right)$$

14.3

$$f(z) = |z|^2$$

14.4
$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Lösung: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn u und v in G stetig partiell differenzierbar nach x und y sind und die Cauchy Riemannschen DGL gelten.

(.1) Es gilt
$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)\,,$$
also $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ und $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Die Cauchy Riemannschen DGL
$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -6xy = -v_x$$
sind erfüllt. Somit ist $f(z)$ in $\mathbb{C}$ holomorph. (.2) Es gilt
$$z\,\mathrm{Re}\,(z) = (x+iy)x = x^2 + i\,xy\,,$$
also $u(x,y) = x^2$ und $v(x,y) = xy$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Weiter gilt
$$\begin{array}{lllll} u_x = 2x, & v_y = x & \text{und} & u_x = v_y & \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 0, & v_x = y & \text{und} & u_y = -v_x & \text{nur für } y = 0, \end{array}$$
$f(z)$ ist also nirgends holomorph.

(.3) Für $f(z)$ gilt
$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x,y)\,, \qquad v(x,y) = 0\,.$$
Für die partiellen Ableitungen erhält man
$$\begin{array}{lllll} u_x = 2x, & v_y = 0 & \text{und} & u_x = v_y & \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 2y, & v_x = 0 & \text{und} & u_y = -v_x & \text{nur für } y = 0. \end{array}$$
Die Cauchy Riemannschen DGL gelten also nur für $x = y = 0$, und somit gibt es kein Gebiet, in dem $f(z)$ holomorph ist.

(.4) Für $f(z)$ gilt
$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$
also $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen erhält man
$$\begin{array}{lllll} u_x = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & v_y = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{und} & u_x = v_y & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & v_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{und} & u_y = -v_x & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{array}$$

Die Cauchy-Riemann'schen DGLen sind erfüllt und $f(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 15 (Integral) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma 2ze^{z^2}\,dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1+i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

Lösung: Scharfes Hinsehen zeigt, dass der Integrand $f(z) = 2ze^{z^2}$ in $\mathbb{C}$ die Stammfunktion $F(z) = e^{z^2}$ besitzt. Der Integralwert hängt also nur von den Endpunkten 0 und $1+i$ ab und es gilt

$$\int\limits_\gamma 2ze^{z^2}\,\mathrm{d}z = F(1+i) - F(0) = e^{(1+i)^2} - e^0 = e^{2i} - 1$$

Aufgabe 16 (Integral) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

16.1

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$$

16.2

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)}$$

Lösung:
Wir verwenden jeweils die Cauchy'sche Integralformel:
(.1)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \frac{1}{2i}\left(e^{(i)(-i)} - e^{(-i)(-i)}\right) = 2\pi\frac{1}{2}\left(e^1 - e^{-1}\right) = 2\pi\sinh(1)$$

(.2)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)} = 2\pi i \frac{1}{2i - i/2} = \frac{4}{3}\pi$$

Aufgabe 17 (Integral, Klausuraufgabe 15/16) Berechnen Sie für $f(z) = \bar{z}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = t^2 + it$ das Kurvenintegral $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Lösung:

$$\int_\gamma f(z) = \int_0^1 (t^2 - it)(2t+i)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(2t^3 - it^2 + t\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{i}{3}t^2 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3}$$

Aufgabe 18 (Integral, Klausuraufgabe 13/14) Gegeben ist die Menge

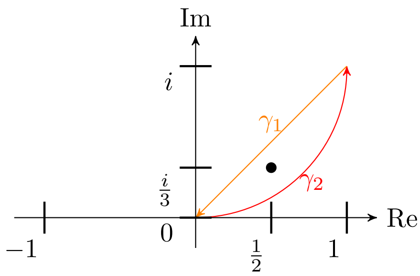
$$G = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z), (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z) - 1)^2 \leq 1\right\}$$

Skizzieren Sie die Menge G, parametrisieren Sie den Rand der Menge ∂G und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial G} \frac{e^z}{6z - 3 - 2i}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung:

Skizze: Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt bei $z = i$. Nur Bereich unterhalb der Winkelhalbierenden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$



Parametrisierung: ∂G lässt sich über die beiden Kurvenstücke γ_1 und γ_2 beschreiben:

$$\gamma_1 = 1 + i - t - it, t \in [0,1] \qquad \gamma_2 = \cos(t) + i\sin(t) + i, t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Integral: Der Integrand besitzt seinen einzigen Pol bei $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}$. Dieser liegt innerhalb von ∂G. Wir wenden die Cauchy Integralformel an:

$$\int_{\partial G} \frac{e^z}{6z - 3 - 2i}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial G} \frac{e^z}{6} \frac{1}{z - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right)}\,\mathrm{d}z \overset{f(\zeta) = \frac{e^\zeta}{6}}{=} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (\frac{1}{2} + \frac{i}{3})}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}) = \frac{\pi i}{3} e^{\frac{1}{2} + \frac{i}{3}}$$

Alternativ: Explizites Ausrechnen?