Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Integralsätze und Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth, Maximilian Jokel
Stand: 7. März 2016

Aufgabe 1 (Zylinder) Gegeben sei der Zylinder Z der Höhe $h > 0$ über dem in der x-y-Ebene gelegenen Kreis mit Radius $R > 0$ um den Ursprung.

1.1 Beschreiben Sie den Zylindermantel von Z in geeigneten Koordinaten.

1.2 Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{v}$ durch die Mantelfläche von Z von innen nach außen, wobei

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z)^\top \mapsto (xz + y, yz - x, z)^T .$$

Aufgabe 2 (Fluss, Klausuraufgabe 15/16) Sei $\Phi : V \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte der Mannigfaltigkeit $M = \Phi(V)$, wobei $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ und $\Phi(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right)^T$.

2.1 Wie lautet die Gramsche Determinante $g^\Phi(u, v)$ von Φ bei $(u, v) \in V$?

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

2.3 Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (1, 0, 0)^T$ durch die Oberfläche M. Die Orientierung der Fläche ist durch $n(0, 0, 0) = (0, 0, 1)^T$ festgelegt. Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis: Berechnen Sie den Fluss einmal durch explizites Ausrechnen und einmal unter Zuhilfenahme des Gaußschen Integralsatzes.)

Aufgabe 3 (Torus) Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi \\ \varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

3.1 den Oberflächeninhalt des Torus $T_R^r := T([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit $r \in [0, R]$,

3.2 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r direkt,

3.3 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des **Satzes von Gauß**.

Aufgabe 4 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma ,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$.

Aufgabe 5 (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\iint_B \Delta u \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \; \mathrm{d}s \,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

Aufgabe 6 (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_\phi \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

Aufgabe 7 (Satz von Green) Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

Aufgabe 8 (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3, x_2, x_2 x_3)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, das zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Aufgabe 9 (Satz von Green) Man verifiziere für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)^\top$ und das Gebiet B, das durch $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird, den Satz von Green.

Aufgabe 10 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_\phi \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial\phi} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

Aufgabe 11 (Satz von Stokes) Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v}$ und die Fläche ϕ

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ \vartheta \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right].$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral $\iint_\phi \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}s$.

Aufgabe 12 (Komplexes Rechnen) Man berechne:

12.1

$$e^{2+\frac{i\pi}{6}}$$

12.2

$$\cosh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

12.3

$$\sinh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

12.4

$$\cos(1 + 2i)$$

12.5

$$\mathrm{Re}\,(z) \ \text{ ohne Verwendung von } \mathrm{Re}\,(\ )$$

12.6

$$\mathrm{Im}\,(z) \ \text{ ohne Verwendung von } \mathrm{Im}\,(\ )$$

Aufgabe 13 (Holomorphe Funktionen) Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \bar{z} \text{ und } g(z) = z^2$$

Diese beiden Funktionen sind auf Holomorphie zu untersuchen. Geben Sie ferner jeweils ein passendes Wegintegral (mit Parametrisierung des verwendeten Weges!) welches die Holomorphie der Funktion belegt oder widerlegt. Kann man für holomorphe Funktionen zeigen, dass das Wegintegral für **alle** geschlossenen Wege verschwindet?

Aufgabe 14 (Holomorphe Funktionen) Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

14.1

$$f(z) = z^3$$

14.2

$$f(z) = z\mathrm{Re}\left(()\, z\right)$$

14.3

$$f(z) = |z|^2$$

14.4

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Aufgabe 15 (Integral) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma 2ze^{z^2}\, dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1+i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

Aufgabe 16 (Integral) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

16.1

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$$

16.2

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)}$$

Aufgabe 17 (Integral, Klausuraufgabe 15/16) Berechnen Sie für $f(z) = \bar{z}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = t^2 + it$ das Kurvenintegral $\int\limits_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$.

Aufgabe 18 (Integral, Klausuraufgabe 13/14) Gegeben ist die Menge

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z), (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z) - 1)^2 \leq 1 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge G, parametrisieren Sie den Rand der Menge ∂G und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{6z - 3 - 2i}\, \mathrm{d}z.$$