Probeklausur

1 Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung:
Induktionsbeginn: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Induktionssschritt: Möglichkeit 1: $n-1 \to n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{n^2+n} \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

2 Komplexe Zahlen

a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $(a+\mathrm{i}b)^{-1}$ an, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \qquad\qquad + \mathrm{i}$$

Lösung:

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}$$

b) Geben Sie $(-1+\mathrm{i})^6$ in Polardarstellung, $re^{\mathrm{i}\phi}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an.

$r =$ $\qquad\qquad$ $\phi =$

Lösung:

$$\begin{aligned} & (-1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3/4\pi} \\ \Rightarrow \quad & (-1+\mathrm{i})^6 = \sqrt{2}^6 \mathrm{e}^{\mathrm{i}18/4\pi} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \end{aligned}$$

3 Konvergenz von Folgen

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

☐ $= -\infty$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☐ $= 42$ ☐ $= \infty$ ☐ = existiert nicht

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\sqrt{1+1/n^2}+1)} = 0$$

b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n$?

☐ $= -4$ ☐ $= -3$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{5}{11}$ ☐ $= \frac{4}{7}$ ☐ $= \infty$ ☐ = undefiniert

Lösung:
Die Terme bilden keine Nullfolge, die Reihe ist also nicht konvergent.

c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^n}$?

☐ $= -\infty$ ☐ $\in (-\infty, 0)$ ☐ $= 0$ ☐ $\in (0, \infty)$ ☐ $= +\infty$ ☐ = undefiniert

Lösung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-n)^n} = \frac{1}{(-1)^1} + \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^3} \pm \dots = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} \pm \dots$$

Die Reihe ist nach dem Leibnitzkriterium (alternierende betragsmäßig monotone Nullfolge) konvergent. Die Teilsummen bilden eine Intervallschachtelung. Insbesondere liegt der Grenzwert im Intervall $[-1, -\frac{3}{4}]$, ist also negativ.

4 Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$. **Lösung:**

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist also: $R = 2$.

5 Grenzwerte von Funktionen und stetige Fortsetzbarkeit

a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} \frac{\log x}{x^2-1}$?

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= -\frac{1}{2}$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ undefiniert

Lösung:

$$\lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{\log x}{x^2-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}$$

b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\tan(x)}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar?

☐ $= -1$ ☐ $= -\frac{1}{2}$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ nicht stetig fortsetzbar

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \cos^2(x) = 1$$

6 Gleichmäßige Stetigkeit

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \sqrt{x}$ definierte Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist. Verwenden Sie dazu $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| < \sqrt{|a-b|}$

Hierzu ist zu zeigen: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad \text{für} \qquad |x - x'| < \delta$$

für alle $x, x' \in [0,\infty)$. Ansatz:

$$|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|} < \epsilon$$

Demnach ist

$$|x - x'| < \epsilon^2$$

Wir können also $\delta = \epsilon^2$ wählen.

7 Integration und Differentiation

Berechnen Sie jeweils:

a) $f'(x) = \frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)^{1/2}} \left[\frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}\right] \\ &= \ldots = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \end{aligned}$$

b) $f'(x) = \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left[\exp\left(\ln(x)\cos(x)\right)\, \exp(-\ln(x)x)\right] \\ &= \exp\left\{\exp[\ln(x)(\cos x - x)]\right\} \exp[\ln(x)(\cos x - x)]\{(\cos x - x)/x - \ln(x)(\sin x - 1)\} \end{aligned}$$

c) $F = \int \frac{x^7+1}{x^5+x^3} dx$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{x^7+1}{x^5+x^3} dx = \int \frac{x^7+x^5-x^5-x^3+x^3+1}{x^5+x^3} dx \\ &= \int dx \left[x^2 - 1 \frac{x^3+1}{x^5+x^3} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \int \frac{x^3+1}{x^5+x^3} dx \end{aligned}$$

Das letzte Integral können wir durch Partialbruchzerlegung lösen. Wir betrachten dazu

$$\frac{x^3+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{x}{x^3} + \frac{d_1 x + d_2}{x^2+1}$$

und vergleichen die Koeffizienten der Zähler

$$x^4(a+d_1) + x^3(b+d_2) + x^2(a+c) + xb + c = x^3 + 1$$

Wir sehen daher: $b = 0$, $d_2 = 1 = d_1 = c$ und $a = -1$. Damit ist

$$\begin{aligned} F &= \frac{x^3}{3} - x + \int dx \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x^2+1} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} - x - \ln|x| - \frac{2}{x^2} + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3}{3} - x - \ln|x| - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \arctan(x) + c \end{aligned}$$

8 Taylorreihe

Sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

und sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ihre Taylorreihe mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

a) Wie lauten die Koeffizienten a_n für $n \geq 1$?

Wir schreiben die Funktion als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

und erkennen den verallgemeinerten binomischen Lehrsatz, den wir zur Bestimmung der Koeffizienten nutzen

$$f(x) = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(1/2-n)}{n!} (-x)^n$$

Diesen Ausdruck kann man umschreiben und erhält

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n! 2^n} x^n$$

b) Wie groß ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

Den Konvergenzradius bestimmen wir mit der Eulerformel

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!2^n} \frac{(n+1)!2^{n+1}}{\prod_{j=1}^{n+1}(2j-1)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)}{2n+1} \right| = 1
\end{aligned}
$$

c) Wie lauten die Koeffizienten b_n der Taylorreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ fon $f'(x)$ im gleichen Entwicklungspunkt?

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!2^n}\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(2j-1)}{(n+1)!2^{n+1}}\, x^n
\end{aligned}
$$