Probeklausur

1 Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung:
Induktionsbeginn: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Induktionsssschritt: Möglichkeit 1: $n-1 \to n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{n^2+n} \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

2 Komplexe Zahlen

a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $(a + \mathrm{i}b)^{-1}$ an, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \qquad + \mathrm{i}$$

Lösung:

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}$$

b) Geben Sie $(-1+\mathrm{i})^6$ in Polardarstellung, $re^{\mathrm{i}\phi}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an.

$r =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\phi =$

Lösung:

$$\begin{aligned} &(-1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3/4\pi} \\ \Rightarrow \qquad &(-1+\mathrm{i})^6 = \sqrt{2}^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}18/4\pi} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \end{aligned}$$

3 Konvergenz von Folgen

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$\square = -\infty$ $\quad\square = 0$ $\quad\square = \frac{1}{2}$ $\quad\square = 1$ $\quad\square = 42$ $\quad\square = \infty$ $\quad\square =$ existiert nicht

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{1+1/n^2}+1)} = 0$$

b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$?

$\square = -4$ $\quad\square = -3$ $\quad\square = 0$ $\quad\square = \frac{5}{11}$ $\quad\square = \frac{4}{7}$ $\quad\square = \infty$ $\quad\square =$ undefiniert

Lösung:
Die Terme bilden keine Nullfolge, die Reihe ist also nicht konvergent.

c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n}$?

$\square = -\infty$ $\quad\square \in (-\infty, 0)$ $\quad\square = 0$ $\quad\square \in (0, \infty)$ $\quad\square = +\infty$ $\quad\square =$ undefiniert

Lösung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n} = \frac{1}{(-1)^1} + \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^3} \pm \dots = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} \pm \dots$$

Die Reihe ist nach dem Leibnitzkriterium (alternierende betragsmäßig monotone Nullfolge) konvergent. Die Teilsummen bilden eine Intervallschachtelung. Insbesondere liegt der Grenzwert im Intervall $[-1, -\frac{3}{4}]$, ist also negativ.

4 Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}x^n$. **Lösung:**

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/n}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(n^{1/n}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist also: $R = 2$.

5 Grenzwerte von Funktionen und stetige Fortsetzbarkeit

a) Welchen Wert hat $\lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{\log x}{x^2-1}$?

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= -\frac{1}{2}$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ undefiniert

Lösung:

$$\lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{\log x}{x^2-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}$$

b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\tan(x)}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar?

☐ $= -1$ ☐ $= -\frac{1}{2}$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ nicht stetig fortsetzbar

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \cos^2(x) = 1$$