Aufgaben Tag 3

1 Reihen

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und die angegebenen Summen haben. Dabei ist f_k die k-te Fibonacci-Zahl

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\frac{11}{4}$

Lösung:
Wir fassen die gegebene Reihe als Grenzwert der Folge ihrer (endlichen) Partialsummen mit oberem Summationsindex N auf und dürfen für jede Partialsumme die geometrische Summenformel $\sum\limits_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ $\forall N \in \mathbb{N}, q \neq 1$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{3^k}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right)\cdot\frac{4}{3}+\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{N+1}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{N+1}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\left(2+\frac{3}{4}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{N+1}\right)
\end{aligned}$$

Da $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ und $\left|\frac{-1}{3}\right|<1$ geht der jeweilige Subtrahend $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$ bzw. $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{N+1}$ gegen 0. Somit ergibt sich für den Grenzwert:

$$= \lim_{N\to\infty}\left(2+\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{4}$$

2 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{3}{4}s$ mit $s:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Lösung:
Wir nutzen die Defintion der ζ-Funktion $\zeta(2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=: s$ aus.

$$\sum_{k>0 \text{ gerade}}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{s}{4}$$

Damit ergibt sich bereits die Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\sum_{k>0 \text{ ungerade}}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k>0 \text{ gerade}}^{\infty}\frac{1}{k^2}=s-\frac{s}{4}=\frac{3}{4}s$$

3 Reihen

Nach einem wüsten Trinkgelage mit vergorenem Saft ist die chinesische Schnecke Ko-Shi in einen 4 m tiefen Brunnenschacht gefallen. Beim Versuch aus dem Schacht herauszuklettern schafft sie am ersten Tag einen Meter. Den zweiten Tag teilt sie sich in zwei Etappen ein, schafft pro Etappe aber nur q Meter ($0 < q < 1$). Am dritten Tag schafft sie drei Etappen mit jeweils q^2 Metern, am vierten Tag vier Etappen von jeweils q^3 Metern etc. Die Schnecke will natürlich in endlicher Zeit am Brunnenrand ankommen. Wie groÃ§ muss dann q mindestens sein?
Tipp: Die Schnecke hieß mit Nachnamen Plo-Dugd.
Lösung:
Wie bereits durch den chinesischen Namen der Schnecke angedeutet, läßt sich das Cauchy-Produkt zweier (geometrischer) Reihen benutzen, um die Aufgabe schnell zu lösen: Die vom Boden des Brunnenschachtes aus gemessene, bis zum n-ten Tag zurückgelegte Wegstrecke beträgt:

$$s_n := 1 + (q + q) + (q^2 + q^2 + q^2) + \dots + n \cdot q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot q^k$$

Dies läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$s_n = q^0 \cdot q^0 + (q^0 \cdot q^1 + q^1 \cdot q^0) + (q^0 \cdot q^2 + q^1 \cdot q^1 + q^2 \cdot q^0) + \dots + \sum_{j=0}^{n-1} q^j \cdot q^{(n-1)-j}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} q^j \cdot q^{k-j} \right)$$

Die Schnecke erreicht (und überquert) den Rand des Brunnens genau dann in endlicher Zeit, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $s_n \geq 4$ ist. Für $q \geq 1$ ist dies immer der Fall (die Schnecke überschreitet spätestens am dritten Tag den Rand). Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entspricht genau den Partialsummen des Cauchy-Produktes der geometrischen Reihe $\sum q^k$ mit sich selbst. Aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum q^k$ für $|(|q) < 1$ gilt nach Produktreihensatz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} q^j \cdot q^{k-j} \right)$$

Da mit $q \geq 0$ (die Schnecke ist ja hoffentlich nicht so betrunken, daß sie in die falsche Richtung kriecht) alle Reihenglieder nicht-negativ sind, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s_n \geq 4$ genau dann, wenn der Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. das obige Produkt der geometrischen Reihe mit sich einen Wert > 4 hat. Für $0 \leq q < 1$ hat man:

$$4 < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} q^j \cdot q^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow (1-q)^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$$

Die Schnecke muÃ§ also $q > \frac{1}{2}$ wählen, um in endlicher Zeit aus dem Brunnenschacht zu kommen (bei $q = \frac{1}{2}$ würde sie dem Rand beliebig nahe kommen, ihn aber in endlicher Zeit nie erreichen, bei $q < \frac{1}{2}$ bleibt sogar ein Wegstück übrig).

4 Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{k+1}, & \text{falls } \frac{1}{k+1} \leq |x| \leq \frac{1}{k} \; (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $a = 0$ stetig ist.

Tipp: Es gilt $|f(x)| \leq |x|$
Lösung:
Zunächst überlegt man sich anhand der Funktionsdefinition, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ stets $|f(x)| \leq |x|$ gilt: Für $x = 0$ ist dies klar $(|0| = 0 = |(|f(0)))$. Für $x \geq 1$ oder $x \leq -1$ ebenfalls $(|x| \geq 1 = f(x) = |f(x)|)$. Fr̈ alle anderen x gilt $\frac{1}{k} > |x| \geq \frac{1}{k+1} = f(x) = |f(x)|$. Damit ist der Tipp explizit nachgewiesen. Die Funktion f ist in $a = 0$ stetig, wie man leicht mittels eines $\epsilon - \delta$-Arguments einsieht: Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ setzt man $\delta := \epsilon > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = |x - 0| < \delta$ gilt nun offenbar:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

Somit ist f in $a = 0$ stetig.
Bemerkung: Man beachte, daß f an allen Stellen $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ unstetig ist. Die Unstetigkeitsstellen häufen sich also bei 0, i.e. die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hat den Häufungspunkt 0. Trotzdem ist f bei $a = 0$ stetig.

5 Differenzieren

Leiten Sie die folgenden Ausdrücke nach x ab:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin(\omega x + a)$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\mathrm{e}^{ax} \sin(\omega x + a)]' = a\mathrm{e}^{ax} \sin(\omega x + a) + \omega \mathrm{e}^{ax} \cos(\omega x + a) \\ &= \mathrm{e}^{ax}(a \sin(\omega x + a) + \omega \cos(\omega x + a)) \end{aligned}$$

b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\cos(\sin(\cos(x^2)))]' \\ &= 2x \cdot (-\sin(x^2)) \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(\sin(\cos(x^2))) \\ &= 2x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot \sin(\sin(\cos(x^2))) \end{aligned}$$

c) Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^a \sin(\frac{1}{x})$ fr̈ $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ im Nullpunkt differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

Lösung:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^a \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^a}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Es gilt: $-1 \leq \sin(\frac{1}{x} \leq 1$ und damit ist die obere Grenze nur dann definiert, wenn $a > 1$ $\Rightarrow\ f'(0) = 0$.

6 l'Hospital

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

Lösung:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Lösung:
Mehrmaliges Anwenden von l'Hospital führt uns nur im Kreis herum. Zur Bestimmung des Grenzwertes verwenden wir daher die Definitionen von sinh und cosh-

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 1$$

7 Ableitungsregel von Leibniz

a) Beweisen Sie für n-mal differenzierbare Funktionen f und g die Leibnizregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Lösung:
Induktionsanfang: $n = 1$
Dies liefert die bekannte Produktregel.

$$\begin{aligned}(fg)^{(1)}(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, wir haben für alle $n' \leq n$ gezeigt:

$$(fg)^{(n')}(x) = \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} f^{(k)}(x) g^{(n'-k)}(x)$$

Induktionsschluss: Wir zeigen $n \to n+1$

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(x) = \left((fg)^{(n)}\Big(x\Big)\right)' &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)\Big)\end{aligned}$$

Eine Indexverschiebung im ersten Teil der Summe lifert:

$$= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)$$
$$+ f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} +1 \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

b) Berechnen Sie die Ableitung $(x^3 \mathrm{e}^{2x})^{(2011)}$

Lösung:

$$(x^3\mathrm{e}^{2x})^{(2011)} = \left(8x^3 + 12\cdot 2011x^2 + 12\binom{2011}{2}x + 6\binom{2011}{3}\right)2^{2008}\mathrm{e}^{2x}$$

8 Integration

a) Berechnen Sie das Integral: $\int\limits_1^{64} \frac{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}-1}\mathrm{d}t$

Lösung:
Forme zunčhst den Bruch um:

$$\frac{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}-1} = \frac{t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}-1} = t^{\frac{1}{3}}\frac{t^{\frac{1}{6}}-1}{t^{\frac{1}{3}}-1} = t^{\frac{1}{3}}\frac{t^{\frac{1}{6}}-1}{(t^{\frac{1}{6}}-1)(t^{\frac{1}{6}}+1)}$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{6}}+1} = \frac{t^{\frac{-5}{6}}t^{\frac{7}{6}}}{t^{\frac{1}{6}}+1}$$

Substituiere nun im Integral $s = t^{\frac{1}{6}}$

$$\int\limits_1^{64}\frac{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}-1}\mathrm{d}t = \int\limits_1^{2}\frac{6s^7}{s+1}\mathrm{d}s = 6\int\limits_1^{2}\frac{s^7+1}{s+1} + \frac{-1}{s+1}\mathrm{d}s$$
$$= 6\left(\frac{s^7}{7} - \frac{s^6}{6} + \frac{s^5}{5} - \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + s - \log|s+1|\right)\Bigg|_{s=1}^{s=2}$$
$$= -6\log 3 + 6\log 2 + \frac{5009}{70}$$

b) Untersuchen Sie das Integral $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\infty}\sin(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$ auf Konvergenz.

Lösung:

$$\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t\to\infty)$$
$$\Rightarrow \qquad \exists\ a > 0 : \sin\left(\frac{1}{t}\right) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{t}\ \forall t \geq a$$
$$\Rightarrow \qquad \int\limits_a^{\infty}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \geq \frac{1}{2}\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \text{ divergiert}$$
$$\Rightarrow \qquad \int\limits_a^{\infty}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{ divergiert}$$

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$

Tipp: Zeigen Sie $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)$.

Lösung:

Wir zerlegen den Integranden und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\log|t+1| - \frac{1}{6}\log\left|t^2-t+1\right| + \frac{2}{3}\int\frac{1}{1+\frac{4}{3}(t-{}^1\!/_2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\log|t+1| - \frac{1}{6}\log\left|t^2-t+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int t^3\arctan(t)\mathrm{d}t$

Lösung:

Einmaliges partielles integrieren liefert:

$$\begin{aligned}
\int t^3\arctan(t)\mathrm{d}t &= \frac{t^4}{4}\arctan(t) - \frac{1}{4}\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^4-1}{4}\arctan(t) - \frac{t^3-3t}{12}
\end{aligned}$$