Aufgaben Tag 3

1 Reihen

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und die angegebenen Summen haben. Dabei ist f_k die k-te Fibonacci-Zahl

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right) = \frac{11}{4}$

2 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4}s$ mit $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

3 Reihen

Nach einem wüsten Trinkgelage mit vergorenem Saft ist die chinesische Schnecke Ko-Shi in einen 4 m tiefen Brunnenschacht gefallen. Beim Versuch aus dem Schacht herauszuklettern schafft sie am ersten Tag einen Meter. Den zweiten Tag teilt sie sich in zwei Etappen ein, schafft pro Etappe aber nur q Meter ($0 < q < 1$). Am dritten Tag schafft sie drei Etappen mit jeweils q^2 Metern, am vierten Tag vier Etappen von jeweils q^3 Metern etc. Die Schnecke will natürlich in endlicher Zeit am Brunnenrand ankommen. Wie groÃ§ muss dann q mindestens sein?
Tipp: Die Schnecke hieß mit Nachnamen Plo-Dugd.

4 Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{k+1}, & \text{falls } \frac{1}{k+1} \leq |x| \leq \frac{1}{k} \ (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $a = 0$ stetig ist.

Tipp: Es gilt $|f(x)| \leq |x|$

5 Differenzieren

Leiten Sie die folgenden Ausdrücke nach x ab:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin(\omega x + a)$

b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$

c) **Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^a \sin(\frac{1}{x})$ fr $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ im Nullpunkt differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.**

6 l'Hospital

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

7 Ableitungsregel von Leibniz

a) Beweisen Sie für n-mal differenzierbare Funktionen f und g die Leibnizregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

b) Berechnen Sie die Ableitung $(x^3 \mathrm{e}^{2x})^{(2011)}$

8 Integration

a) Berechnen Sie das Integral: $\int\limits_1^{64} \frac{\sqrt{t} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t} - 1} \mathrm{d}t$

b) Untersuchen Sie das Integral $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \sin(\frac{1}{t}) \mathrm{d}t$ auf Konvergenz.

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{t^3+1} \mathrm{d}t$

Tipp: Zeigen Sie $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)$.

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int t^3 \arctan(t) \mathrm{d}t$