Aufgaben Tag 2

9 Konvergenz von Folgen

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und beweisen Sie, dass die Folgen konvergieren bzw. divergieren.

a) $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \dots)$

Lösung:
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{B}}$ ist genau dann konvergent, wenn Sie eine Cauchy-Folge ist, das heißt, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_k| < \epsilon, \ \forall n, k \geq N_\epsilon$$

erfüllt ist. Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^{n+1})$ wäre konvergent, dann existiert zu jedem $\epsilon < 2$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_k| < \epsilon = 2, \ \forall n, k \geq N_\epsilon$ Insbesondere würde dies für $k = n + 1$ gelten, also auch

$$|a_n - a_{n+1}| = |1 - (-1)| = 2 < 2$$

Dies ist ein Widerspruch! Also divergiert die Folge.

b) $(n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ für $\alpha \in \mathbb{Q}, \ \alpha > 0$

Lösung:
Da $\alpha \in \mathbb{Q}$, kann es also als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden, $\alpha = \frac{p}{q}$. Da $\alpha > 0$ können wir ohne Einschränkung $p, q > 0$ annehmen. Wir vermuten, dass der Grenzwert der Folge $n^{-\alpha}$ gleich 0 ist. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ existiert ein $N_\epsilon \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ mit

$$\epsilon^{-1/\alpha} = \epsilon^{-q/p} < N_\epsilon$$

Hieraus folgt aber $N_\epsilon^{-p/q} < \epsilon$, woraus folgt:

$$0 \leq n^{-\alpha} \leq N_\epsilon^{-\alpha} < \epsilon, \ \forall n \geq N_\epsilon$$

Daher gilt:

$$\left|n^{-\alpha} - 0\right| = n^{-\alpha} \leq N_\epsilon^{-\alpha} < \epsilon$$

und damit konvergiert $n^{-\alpha}$ gegen 0.

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung:
Wegen der Ungleichung

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

können wir das EinschlieÃ§ungskriterium anwenden: die konstante Folge 0 ist eine untere Schranke. Aus der vorigen Teilaufgabe wissen wir, dass die obere Schranke $\frac{1}{\sqrt{n}} = n^{-1/2}$ ebenfalls eine Nullfolge ist. Daher muss auch $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$$

d) $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung:
Wir vermuten, dass der Grenzwert 1 ist. Aus

$$0 \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$$

folgt dann:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - 1\right| &= 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist, wie wir aus der vorhergehenden Aufgabe wissen, eine Nullfolge. Somit haben wir gezeigt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = 1$$

10 Folgen

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz, uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$ bzw. Divergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n := \frac{1-2n^3}{n^2-n}$

Lösung:
Merke: Jede konvergente Folge ist beschränkt.
Die Folge divergiert bestimmt gegen $-\infty$ und ist daher auch nicht beschränkt, denn mit $-2n + n^{-2}$ haben wir eine bestimmt divergente Minorante gefunden,

$$\frac{1-2n^3}{n^2+n} > -\frac{2n^3}{n^2+n} > -2n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

b) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lösung:
Die Folge konvergiert gegen 0 und ist somit beschränkt, denn aus der strengen Monotonie der Wurzel und der Abschätzung

$$\begin{aligned}0 \le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

folgt wiederum, dass wir das Einschließungskriterium anwenden können, woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

c) $a_n := \frac{(n+1)(3n^2+n)}{2+5n^3}$

Lösung:
Die Folge konvergiert gegen $\frac{3}{5}$, dem Verhältnis der Vorfaktoren der n^3-Terme in Zähler und Nenner, und ist somit beschränkt:

$$\lim_{n\in\infty} \frac{(n+1)(3n^2+n)}{2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 4n^2+n}{5n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4n^{-1}+n^{-2}}{5+2n^{-3}} = \frac{3+0+0}{5+0}$$
$$= \frac{3}{5}$$

d) $a_n := \sqrt{n^2+n} - n$

Lösung:
Wir können die Differenz der Wurzeln als Bruch umschreiben und erhalten:

$$\lim_{n\to\inf} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\inf} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\inf} \frac{1}{\sqrt{1+n^{-1}}+1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Die Folge konvergiert gegen $\frac{1}{2}$ und ist daher auch beschränkt.

e) $a_n := \frac{(-1)^n n^2+3}{2n^2+n}$

Lösung:
Die Folge divergiert, sie hat aber zwei Häufungspunkte, nämlich $\pm\frac{1}{2}$. Die geraden Elemente der Folge konvergieren gegen $+\frac{1}{2}$, wärend die Teilfolge (a_{2n+1}) mit den ungeraden Elementen gegen $-\frac{1}{2}$ konvergiert.

$$\lim_{n\to\inf} a_{2n} = \lim_{n\to\inf} \frac{(-1)^{2n}(2n)^2+3}{2(2n)^2+(2n)} = \lim_{n\to\inf} \frac{1+3(2n)^{-2}}{2+(2n)^{-1}}$$
$$= +\frac{1}{2}$$

Trotzdem ist (a_n) beschränkt, da

$$\left| \frac{(-1)^n n^2+3}{2n^2+n} \right| \leq \frac{n^2+3}{2n^2+n} = \frac{1+3n^{-2}}{2+n^{-1}} \leq \frac{1+3\cdot 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

f) $a_n := \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Lösung:
Die Folge konvergiert gegen 1 und ist somit beschränkt. Das folgert man wieder aus dem Einschließungskriterium, da $-n^{-2} > -1$ für $n \geq 2$ ist (wir sind an dem Verhalten für groÃ§e n interessiert!), können wir die Bernoulli-Ungleichung anwenden und erhalten so

$$1 - \frac{1}{n} = 1 - n\frac{1}{n^2} \leq (1-n^{-2})^n \leq 1$$

Die linke Seite konvergiert gegen 1, die rechte Seite ist die konstante Folge 1. Daher muss auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

gelten.

11 Deutsch ⇄ Mathematik

Übersetzen Sie Folgendes in die jeweils âĂŸandere SpracheâĂŹ und erläutern Sie die Konzepte. Bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Lösung:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq N_\epsilon$$

b) (a_n) ist beschränkt

Lösung:

$$\exists M > 0 : \ |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

c) (a_n) ist monoton fallend

Lösung:

$$a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

d) Es existiert ein größtes $b \in \mathbb{N}$ derart, dass $b \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Lösung:

$$b = \inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

(Wichtig ist, dass für die Existenz des Infimums die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich ist.)

12 Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen (absolut) konvergieren.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

Lösung:
Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe:

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Lösung:
Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe nicht:

$$\frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e} > 1$$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^9}{2^n}$

Lösung:
Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium:

$$\left(\frac{n^9}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^9}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Lösung:
Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium, da für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $\sqrt{n} \leq n$ gilt, können wir die Reihe durch die harmonische Reihe abschätzen,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$$

13 Konvergenz von Potenzreihen

Geben Sie die Konvergenzradien von folgenden Reihen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k z^n$

Lösung:
Aus dem Quotientenkriterium folgt:

$$\frac{\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k}{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k} = \left(1 - \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-a} = R^{-1}$$

Der Konvergenzradius ist somit $R = \mathrm{e}^a$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^{n^2} z^n$

Lösung:
Aus dem Wurzelkriterium folgt:

$$\left[\left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^n$$

besitzt zwei Häufungspunkte, $\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^{-a}$, d.h.

$$R = \min\{\mathrm{e}^{-a}(= 1/e^{a}), \mathrm{e}^{a}(= 1/e^{-a})\}$$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \ a \in \mathbb{N}$

Lösung:
Die Reihe bricht nach endlich vielen Termen ab, da $\binom{a}{n} = 0, \ \forall n > a$. Somit ist der Konvergenzradius unendlich, $R = \infty$.

14 Teleskopsummen

Berechnen Sie folgende Reihenwerte:
Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung und schreiben Sie die Summe als Teleskopsumme um.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Lösung:
Man kann die Summanden in folgende Teile zerlegen:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Eingesetzt in die Partialsummen folgt:

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Die Partialsummen konvergieren also gegen 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

Lösung:
Man kann die Summanden in folgende Teile zerlegen:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

Eingesetzt in die Partialsummen folgt:

$$\begin{aligned} s_N := \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)} \end{aligned}$$

Die Partialsummen konvergieren also gegen $\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)}\right) = \frac{3}{4}$$

15 Freitag vor zwei Wochen

Fritz vergeht sich an einer vollen Literflasche Whisky seines Vaters folgendermaßen: Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil λ des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Whiskykonzentration in der Flasche auf $\leq \frac{1}{2}$ gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im Ganzen getrunken? Berechen Sie die Grenzwerte für $\lambda \to 0$.

Lösung:
Es bleibt nach jedem Schluck $(1-\lambda)$ mal der vorherigen Menge Whisky in der Flasche zurück. Also gilt nach n Schlucken:

$$(1-\lambda)^n \text{Whisky in der Flasche}$$
$$1-(1-\lambda)^n \text{Whisky in der Fritz}$$

Insgesamt trinkt Fritz $n \cdot \lambda$ Liter Flüssigkeit, also $n \cdot \lambda - [1-(1-\lambda)^n]$ Liter Wasser. Bestimme nun die Anzahl der Schlucke, die nötig sind, um die Hälfte des Whisky zu trinken:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)^n &\leq \frac{1}{2}\\ n &\geq \frac{\log 0.5}{\log(1-\lambda)}\end{aligned}$$

Fritz trinkt für $\lambda \to 0$ also einen halben Liter Whisky und

$$\begin{aligned}n\lambda - [1-(1-\lambda)^n] &\geq \frac{-\log 2}{\log(1-\lambda)} \cdot \lambda - \left[1 - \mathrm{e}^{\left(\frac{-\lambda \log 2}{\log(1-\lambda)} \cdot \log(1-\lambda)\right)}\right]\\ &= \frac{-\lambda \log 2}{\log(1-\lambda)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Liter Wasser. Im Grenzwert $\lambda \to 0$ gilt unter Verwendung von Bernoulli und der Regel von l'Hopital:

$$\lim_{\lambda \to 0}\left(\frac{-\lambda \log 2}{\log(1-\lambda)} - \frac{1}{2}\right) = \log 2 \lim_{\lambda \to 0} \log(1-\lambda) - \frac{1}{2} = \log 2 - \frac{1}{2}$$

16 Stetigkeit

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist.

Lösung:
Aus der Definition von Stetigkeit gilt für f:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Es gilt also:

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|$$

Daraus folgt:

$$|x - x_0| > \delta \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < \underbrace{\epsilon + |f(x_0)|}_{=:C}$$

Somit erfüllen

$$\begin{aligned}U(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}\\ C &:= \epsilon + |f(x_0)|\end{aligned}$$

für ein $\epsilon > 0$ die verlangte Bedingung.

17 Ableiten

Betrachten Sie die folgenden Funktionen als Funktionen auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für $a, b > 0, \alpha\beta \neq 0$ und $s \neq 0$ die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}$

Lösung:
l'Hospital: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

18 Differenzierbarkeit und mehr

Sei

$$f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin\left(1/t\right), & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

a) f ist differenzierbar

Lösung:

$$f'(t) = 1 + 4t\sin(1/t) - 2\cos(1/t), \ t \neq 0$$
$$f(0) = \lim_{t\to 0}(1 + 2t\sin(1/t)) = 1$$

b) f' ist auf $(-1, 1)$ beschränkt

Lösung:

$$f'(t) = 1 + 4t\sin(1/t) - 2\cos(1/t), \ t \neq 0$$
$$f(0) = \lim_{t\to 0}(1 + 2t\sin(1/t)) = 1$$

c) $f'(0) = 1$

Lösung:

$$f'(t) = 1 + 4t\sin(1/t) - 2\cos(1/t), \ t \neq 0$$
$$f(0) = \lim_{t\to 0}(1 + 2t\sin(1/t)) = 1$$

d) f ist auf keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon), \ \epsilon > 0$ monoton wachsend

Lösung:
In jedem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ kann ein $\tilde{t}$ gefunden werden mit

$$\frac{1}{\tilde{t}} \in (2\mathbb{Z} + 1) \cdot \pi$$

Dann gilt $f'(\tilde{t}) = -1$