Aufgaben Tag 2

9 Konvergenz von Folgen

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und beweisen Sie, dass die Folgen konvergieren bzw. divergieren.

a) $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \dots)$

b) $(n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ für $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha > 0$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

d) $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

10 Folgen

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz, uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$ bzw. Divergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n := \frac{1-2n^3}{n^2-n}$

b) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

c) $a_n := \frac{(n+1)(3n^2+n)}{2+5n^3}$

d) $a_n := \sqrt{n^2+n} - n$

e) $a_n := \frac{(-1)^n n^2+3}{2n^2+n}$

f) $a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

11 Deutsch $\rightleftarrows$ Mathematik

Übersetzen Sie Folgendes in die jeweils âĂŸandere SpracheâĂŹ und erläutern Sie die Konzepte. Bezeichne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

b) (a_n) ist beschränkt

c) (a_n) ist monoton fallend

d) Es existiert ein größtes $b \in \mathbb{N}$ derart, dass $b \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

12 Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen (absolut) konvergieren.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^9}{2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

13 Konvergenz von Potenzreihen

Geben Sie die Konvergenzradien von folgenden Reihen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k z^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^{n^2} z^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \;\; a \in \mathbb{N}$

14 Teleskopsummen

Berechnen Sie folgende Reihenwerte:
Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung und schreiben Sie die Summe als Teleskopsumme um.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

15 Freitag vor zwei Wochen

Fritz vergeht sich an einer vollen Literflasche Whisky seines Vaters folgendermaßen: Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil λ des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Whiskykonzentration in der Flasche auf $\leq \frac{1}{2}$ gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im Ganzen getrunken? Berechen Sie die Grenzwerte für $\lambda \to 0$.

16 Stetigkeit

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f in einer Umgebung von x_0 beschränkt ist.

17 Ableiten

Betrachten Sie die folgenden Funktionen als Funktionen auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für $a, b > 0, \alpha\beta \neq 0$ und $s \neq 0$ die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}$

18 Differenzierbarkeit und mehr

Sei

$$f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin\left(1/t\right), \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \ t = 0 \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

a) f ist differenzierbar

b) f' ist auf $(-1, 1)$ beschränkt

c) $f'(0) = 1$

d) f ist auf keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon), \ \epsilon > 0$ monoton wachsend