Aufgaben Tag 1

1 Komplexe Zahlen I

Berechnen Sie Real- und ImaginÃďrteil von

a) $(1+\mathrm{i})^2$

Lösung:

$$(1+\mathrm{i})^2 = 0 + 2\mathrm{i}$$

b) $\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{-1}$

Lösung:

$$\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{-1} = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

c) $\frac{5}{3+\mathrm{i}}$

Lösung:

$$\frac{5}{3+\mathrm{i}} = \frac{5}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}(3-\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(3-\mathrm{i})$$

d) den Lösungen der Gleichung $z^2 = 2\mathrm{i}$

Lösung:
Aus a) sehen wir, dass $z = 1+\mathrm{i}$ und $z = -1-\mathrm{i}$ die zwei Lösungen der Gleichung sind.

2 Komplexe Zahlen II

Die folgenden komplexen Zahlen schreibe man in der Normalform $x+\mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ und berechne ihren Betrag.

a) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4$

Lösung:

$$z = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4 = \left[\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}\right)^2 = (-1)^2 = 1 + 0\cdot\mathrm{i}$$
$$|z| = 1$$

b) $\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

Lösung:

$$z = \frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})^2}{4+1} = \frac{4+4\mathrm{i}-1}{5} = \frac{3}{5} + \mathrm{i}\frac{4}{5}$$
$$|z| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

c) $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n,\ N \in \mathbb{N}$

Lösung:
Durch den Übergang in Polarkoordinaten erhält man:

$$1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(\pm\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pm\pi/4)\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) \pm \mathrm{i}\sin(\pi/4)\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = (1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left[(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4))^n + (\cos(\pi/4) - \mathrm{i}\sin(\pi/4))^n\right]$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos(n\pi/4) + \mathrm{i}\sin(n\pi/4) + \cos(n\pi/4) - \mathrm{i}\sin(n\pi/4)\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+2} \cos(n\pi/4) + \mathrm{i}\cdot 0$$

$$|z| = \left(\sqrt{2}\right)^{n+2} |\cos(n\pi/4)|$$

wobei der Cosinus je nach n die Werte $\pm 1, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder 0 annimmt.

d) $\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}$

Lösung:

$$z = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{-1-3} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

3 Komplexe Zahlen III

Bestimmen Sie für $n = 3, 4(, 5)$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Geben Sie die Lösungen jeweils in der Standardform $x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ an und zeigen Sie, dass die Lösungen die Eckpunkte eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind $(n = 3, 4(, 5))$.
Lösung:
$n = 3$**:** Berechne die Nullstellen durch Polynomdivision.

$$z^3 = 1$$
$$0 = z^3 - 1 = (z-1)\cdot(z^2 + z + 1)$$

Also ist $z_1 = 1 = 1 + \mathrm{i}\cdot 0$ mit $|z_1| = 1$. Die weiteren Nullstellen lassen sich unter Verwendung der sog. „Mitternachtsformel“einfach bestimmen.

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{q - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_{2,3}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Die Lösungen z_1, z_2, z_3 haben einen Betrag von 1 und liegen somit auf dem Einheitskreis. Bilden die z_i ein regelmäßiges Dreieck, so muss ihr gegenseitiger Abstand gleich sein.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2} = \sqrt{3}$$

$$|z_2 - z_3| = \sqrt{\left[\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{3}$$

$$|z_3 - z_1| = \sqrt{\left[\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right]^2 + \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0\right]^2} = \sqrt{3}$$

Die z_i bilden somit die Eckpunkte eines dem Einheitskreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.
$n = 4$**:**

$$\begin{aligned} z^4 &= 1 \\ 0 &= z^4 - 1 = (z^2-1)\cdot(z^2+1) = (z-1)\cdot(z+1)\cdot(z-\mathrm{i})\cdot(z+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = -1 \qquad z_3 = \mathrm{i} \qquad z_4 = -\mathrm{i}$$

mit einem Betrag von $|z_i| = 1$. Für die wechselseitigen Abstände ergibt sich:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_3| &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \\ |z_3 - z_2| &= \sqrt{[0-(-1)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \\ |z_2 - z_4| &= \sqrt{[(-1)-0]^2 + [0-(-1)]^2} = \sqrt{2} \\ |z_4 - z_1| &= \sqrt{(0-1)^2 + [(-1)-0]^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

4 vollständige Induktion I

Zeigen Sie induktiv, dass dÃijr alle $n \in \mathbb{N}$ und $w, z \in \mathbb{K}$ die binomische Formel gilt.

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k$$

Hinweis: Verwenden sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ und die Konvention $z^0 = 1$.
Lösung:
Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} w^{1-k} z^k &= \binom{1}{0} w^1 z^0 + \binom{1}{1} w^0 z^1 \\ &= w + z = (w+z)^1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, wir haben für alle $n' \leq n$ gezeigt:

$$(w+z)^{n'} = \sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} w^{n'-k} z^k$$

Induktionsschluss: Wir zeigen $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(w+z)^{n+1} &= (w+z)(w+z)^n \\
&= (w+z)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w^{n-k}z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w^{n-k+1}z^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w^{n-k}z^{k+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} w^{n-k+1}z^k + z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} w^{n-k}z^{k+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} w^{n-k+1}z^k + z^{n+1} + \sum_{k'+1}^{n}\binom{n}{k'-1} w^{n-(k'-1)}z^{k'} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} w^{n-k+1}z^k + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} w^{n-k+1}z^k + z^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} w^{n-k+1}z^k
\end{aligned}$$

5 vollständige Induktion II

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag als $|x| = \max\{-x, x\}$.

a) Zeigen Sie Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$

Lösung:
Aus der Definition des Betrages wissen wir:

$$\begin{aligned}
& x \leq |x| \qquad y \leq |y| \\
\Rightarrow \qquad & x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
& -x \leq |x| \qquad -y \leq |y| \\
\Rightarrow \qquad & -x + (-y) \leq |x| + (-y) \leq |x| + |y|
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\pm(x+y) \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Lösung:
Induktionsanfang: Die Aussage ist für $n = 1$ offensichtlich richtig, für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{1} x_k\right| = |x_1| \leq |x_1| = \sum_{k=1}^{1} |x_k|$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für alle $n' \leq n,\ n' \in \mathbb{N}$ gezeigt worden ist:

$$\left|\sum_{k=1}^{n'} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n\prime} |x_k|$$

Induktionsschluss: Wir zeigen $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|
\end{aligned}$$

6 vollstÃďndige Induktion III

Beweisen Sie:

a) $2^n < n!,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

Lösung:
Induktionsanfang: Die Aussage ist für $n = 4$ wahr.

$$2^4 = 16 < 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen, dass für alle $n' \leq n,\ n' \in \mathbb{N}$ gezeigt worden ist:

$$2^{n'} < n'!$$

Induktionsschluss: Wir zeigen $n \to n+1$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1)!$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Hinweis: Verwenden sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.
Lösung:
Induktionsanfang: Die Aussage ist für $n = 0$ wahr.

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 = (a+b)^0$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für alle $n' \leq n,\ n' \in \mathbb{N}$ gezeigt worden ist:

$$\sum_{k=0}^{n'} \binom{n'}{k} a^k b^{n'-k} = (a+b)^{n'}$$

Induktionsschluss: Wir zeigen $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

7 Die geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}$ definieren wir $Q = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Hinweis: Bernoulli-Ungleichung und die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, für $q > 1$ ist Q unbeschränkt.

Lösung:
Beweis durch Widerspruch:
Sei $x = q - 1 > 0$, dann ist $q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$.
Annahme: Q ist beschränkt durch $K \in \mathbb{R}$.
Es existiert aber ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{K-1}{x}$, bzw. $K < 1 + nx \leq q^n \in Q$.
K ist also keine obere Schranke von Q. Widerspruch!

b) Zeigen Sie, für $0 < q < 1$ ist $\inf Q = 0$

Lösung:
Wir zeigen zwei Dinge:

1. 0 ist eine untere Schranke.

2. Jede andere untere Schranke ist kleiner gleich 0.

Zu 1): Offenbar ist 0 eine untere Schranke von Q, da $q^n > 0$.
Wir nehmen an $\epsilon > 0$ sei eine weitere untere Schranke von Q, dann wäre $1/\epsilon$ eine obere Schranke der Mengem$\{(1/q)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, die jedoch wegen $1/q > 1$ und a) keine obere Schranke besitzt. Ist ϵ eine untere Schranke von Q, dann folgt also $\epsilon \leq 0$. Somit ist 0 die kleinste untere Schranke.

8 Folgen

a) Stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert der Folge $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)$ auf und versuchen Sie dann, Ihre Vermutung durch Rückgriff auf die ϵ-N-Definition zu beweisen.

Lösung:
Wir vermuten für die Folge (a_n) den Grenzwert $3/5$. Nun muss gezeigt werden, dass gilt:

$$\forall \epsilon\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N: \ \left|a_n - \frac{3}{5}\right| < \epsilon$$

Beweis:

$$\left|a_n - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{3n+1}{5n-2} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{11}{25n-10}\right| = \frac{11}{25n-10}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ gilt:

$$0 < \frac{11}{25N-10} < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad N > \frac{11}{25\epsilon} + \frac{2}{5}$$

Die letzte Ungleichung ist zugleich für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ erfüllt. Nach dem Archimedischen Axiom existiert zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahlen $N = N_\epsilon = \lceil \frac{11}{25\epsilon} + \frac{2}{5} \rceil + 1$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|a_n - \frac{3}{5}\right| = \frac{11}{25n-10} \leq \frac{11}{25N-10} < \epsilon$$

Die Folge konvergiert somit gegen den Grenzwert $\frac{3}{5}$.

b) Ist die Folge (f_n) der Fibonacci-Zahlen konvergent?

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \ n > 2$$

Lösung:
Wir zeigen per Induktion, dass für die Folge (f_n) der Fibonacci-Zahlen folgendes gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ A(n): f_n \geq 1$$

Induktionsanfang: Für $n = 1, 2$ gilt $f_1 = f_2 = 1 \geq 1$, also sind $A(1)$ und $A(2)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für alle $n' \leq n, \ n' \in \mathbb{N}$ die Richtigkeit von $A(n')$ gezeigt worden ist.
Induktionsschluss: Wir zeigen $n-1, n \to n+1$
Da $f_{n-1} \geq 1$ und $f_n \geq 1$, folgt sofort

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq 1 + 1 \geq 1$$

Also gilt $A(n+1)$.
Für die Differenz zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen erhält man deshalb

$$f_{n+2} - f_{n+1} = f_{n+1} + f_n - f_{n+1} = f_n \geq 1$$

Ab dem Index $n = 2$ wächst die Folge der Fibonacci-Zahlen damit in jedem Schritt um mindestens 1. Jede $\epsilon = \frac{1}{2}$-Umgebung um eine beliebige reelle Zahl kann daher höchstens 2 Folgenglieder enthalten. Sie enthält also niemals fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht (tatsächlich wächst sie über alle Grenzen).

c) Untersuchen Sie die komplexe Zahlenfolge (c_n) mit $c_n = \frac{1}{(1+i)^n}$ auf Konvergenz.

Lösung:
Wir zeigen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Nullfolge ist und benutzen dabei, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ eine Nullfolge bildet:

$$\begin{aligned} |c_n - 0| &= \left|\frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}\right| = \frac{1}{|1+\mathrm{i}|^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

da $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$