Aufgaben Tag 1

1 Komplexe Zahlen I

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

a) $(1+\mathrm{i})^2$

b) $\left(1+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{-1}$

c) $\frac{5}{3+\mathrm{i}}$

d) **den Lösungen der Gleichung** $z^2 = 2\mathrm{i}$

2 Komplexe Zahlen II

Die folgenden komplexen Zahlen schreibe man in der Normalform $x+\mathrm{i}y,\ x,y \in \mathbb{R}$ und berechne ihren Betrag.

a) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4$

b) $\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

c) $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n,\ \ N \in \mathbb{N}$

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}$

3 Komplexe Zahlen III

Bestimmen Sie für $n = 3, 4(, 5)$ alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Geben Sie die Lösungen jeweils in der Standardform $x+\mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ an und zeigen Sie, dass die Lösungen die Eckpunkte eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind ($n = 3, 4(, 5)$).

4 vollständige Induktion I

Zeigen Sie induktiv, dass dür alle $n \in \mathbb{N}$ und $w, z \in \mathbb{K}$ die binomische Formel gilt.

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k$$

Hinweis: Verwenden sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ und die Konvention $z^0 = 1$.

5 vollständige Induktion II

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag als $|x| = \max\{-x, x\}$.

a) Zeigen Sie Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ **und** $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ **gilt:**

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

6 vollständige Induktion III

Beweisen Sie:

a) $2^n < n!, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Hinweis: Verwenden sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

7 Die geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}$ definieren wir $Q = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Hinweis: Bernoulli-Ungleichung und die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, für $q > 1$ **ist** Q **unbeschränkt.**

b) Zeigen Sie, für $0 < q < 1$ **ist** $\inf Q = 0$

8 Folgen

a) Stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert der Folge $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)$ **auf und versuchen Sie dann, Ihre Vermutung durch Rückgriff auf die** ϵ**-N-Definition zu beweisen.**

b) Ist die Folge (f_n) **der Fibonacci-Zahlen konvergent?**

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_n + 1 = f_n + f_{n-1}, \ n > 2$$

c) Untersuchen Sie die komplexe Zahlenfolge (c_n) **mit** $c_n = \frac{1}{(1+i)^n}$ **auf Konvergenz.**