Probeklausur zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016

1 Linearkombination

Drücken Sie das Polynom $a = x^2 - 4x - 3$ als Linearkombination der Vektoren $a_1 = x^2 - 2x + 5, a_2 = 2x^2 - 3x, a_3 = x + 1$ aus.

Lösung:

a und a_1, a_2, a_3 bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ dargestellt:

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

es muss gelten:

$$a = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen des LGS liefert:

$$a = (-\frac{1}{11}) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{6}{11}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-\frac{28}{11}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Matrizenrechnung

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Überprüfen Sie die Invertierbarkeit der Matrizen A, B und C

b) Bestimmen Sie die transponierte Matrix A^T

c) Invertieren Sie die Matrix B zu B^{-1} und die Matrix C zu C^{-1}

d) Bestimmen Sie das Matrixprodukt A · B

Lösung

1. det(A) = -3, det(B)=-13, det(C)=2 $\neq 0$
2. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
3. $B^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 13 \\ -5 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 17 \\ 5 & 6 & 25 \\ 3 & 7 & 25 \end{pmatrix}$

3 Darstellungsmatrix

Sei $F = span_{\mathbb{R}}(cos, e, 1)$, wobei

$$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cos(x),$$

$$e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x,$$

$$1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1.$$

F ist ein Untervektorraum $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
Ferner sei

$$\phi : F \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0).$$

a) Zeigen Sie, dass B = (cos,e,1) eine Basis von F ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

c) Betrachten Sie die Basen B von F und $A = (1)$ von $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{BA}(\phi)$.

Lösung:

a) Es muss gelten: $\lambda_1 cos + \lambda_2 e + \lambda_3 1 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, insbesondere für $x = 0, \pi/2, 3\pi/2$.

- $x = 0 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
- $x = \pi/2 : \lambda_2 e^{\pi/2} + \lambda_3 = 0$
- $x = 3\pi/2 : \lambda_2 e^{3\pi/2} + \lambda_3 = 0$ Da $e^{\pi/2} \neq e^{3\pi/2}$ gilt $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und damit $\lambda_1 = 0$.

b) Sei $f = \lambda_1 cos + \lambda_2 e + \lambda_3 1$ und $g = \mu_1 cos + \mu_2 e + \mu_3 1$

- $\phi(f+g) = \phi((\lambda_1+\mu_1)cos+(\lambda_2+\mu_2)e+(\lambda_3+\mu_3)1) = (\lambda_1+\mu_1)cos(0)+(\lambda_2+\mu_2)e^0+(\lambda_3+\mu_3)1 = \lambda_1 cos(0) + \lambda_2 e^0 + \lambda_3 1 + \mu_1 cos(0) + \mu_2 e^0 + \mu_3 1 = \phi(f) + \phi(g)$
- $\phi(\eta f) = \phi(\eta\lambda_1 cos(0) + \eta\lambda_2 e + \eta\lambda_3 1) = \eta\lambda_1 cos(0) + \eta\lambda_2 e^0 + \eta\lambda_3 1 = \eta(\lambda_1 cos(0) + \lambda_2 e^0 + \lambda_3 1) = \eta\phi(f)$.

c) Wir betrachten die Bilder:

$$\phi(cos) = cos(0) = 1 = (1) \cdot 1$$

$$\phi(e) = e^0 = 1 = (1) \cdot 1$$

$$\phi(1) = 1 = (1) \cdot 1$$

Damit ist die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Untervektorraum

Die Menge M im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$M := \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von M.

Lösung:

a) zu zeigen: M ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

- UV 0: $M \neq \emptyset$, da $(0,0,0)^T \in M$ wegen $0+0+0=0$.
- UV 1: $v = (x_1, x_2, x_3)^T \in M, w = (y_1, y_2, y_3)^T \in M \Rightarrow v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^T \in M$, da gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

und damit

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{=0} + \underbrace{y_1 + y_2 + y_3}_{=0} = 0.$$

- UV 2: $\lambda \in \mathbb{R}, v = (x_1, x_2, x_3)^T \in M \Rightarrow \lambda \in M$, da $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist auch $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} = 0$.

b) Bestimme eine Basis von M: $\forall (x_1, x_2, x_3)^T \in M$ gilt, dass $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -(x_1 + x_2)$, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren von M:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

5 Determinanten

Eine Matrix A heißt antisymmetrisch, wenn gilt: $A^t = -A$.

a) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie det A.

b) Sei A antisymmetrisch und n ungerade. Zeigen Sie, dass dann det A = 0 gilt.

Lösung:

a) $\det A = (-1)^{4+3}(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

b) z.z.: $A^t = -A \to \det A = 0$, n ungerade.

$det(A) = det(A^t) \to A^t = -A \to det(A^t) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ (weil n ungerade) $\to det(A^t) = det(A) = -det(A) \Leftrightarrow A = 0$.

6 Eigenwerte

6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ die einzigen Eigenwerte von A sind.

b) Finden Sie je eine Basis von $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i E_3)$ für $i = 1, 2$.

c) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalisierbar ist.

d) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Transformationsmatrix S an, so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt.

Lösung:

a) EW: $\det(A - \lambda\mathbb{1}_3) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

b)

$$A - \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $Ker(A - \mathbb{1}_3) = span_{\mathbb{R}}((1,-1,0)^T, (0,0,1)^T)$.

$$A - 2\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $Ker(A - 2\mathbb{1}_3) = span_{\mathbb{R}}((0,1,0)^T)$.

c) $\chi_A(\lambda)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren, die geometrische Vielfachheit entspricht der algebraischen, damit ist die Matrix diagonalisierbar.

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2 Matrixeponential

Berechnen Sie das Matrixeponential e^A
Lösung:

$e^A = e^{B+C} = e^B \cdot e^C$ mit B ist Matrix der Diagonalelemente und C die nilpotente Matrix

$$e^A = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix} \cdot (\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 1 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix}$$

7 Gram-Schmidt-Verfahren

Bestimmen Sie die orthonormale Basis zu den Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\hat{b_1} = \frac{\overrightarrow{a}}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{b} - < \overrightarrow{b} \cdot \hat{b_1} > \hat{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{b_2} = \frac{\overrightarrow{b_2}}{|b_2|} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{3} = \overrightarrow{c} - < \overrightarrow{c} \cdot \hat{b_1} > \hat{b_1} - < \overrightarrow{c} \cdot \hat{b_2} > \hat{b_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2^3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 5 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$\hat{b_3} = \frac{\overrightarrow{b_3}}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{3}{4})^2 + 25 + (\frac{3}{4})^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26.125}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$