Probeklausur zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016

1 Linearkombination

Drücken Sie das Polynom $a = x^2 - 4x - 3$ als Linearkombination der Vektoren $a_1 = x^2 - 2x + 5, a_2 = 2x^2 - 3x, a_3 = x + 1$ aus.

2 Matrizenrechnung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Überprüfen Sie die Invertierbarkeit der Matrizen A, B und C

b) Bestimmen Sie die transponierte Matrix A^T

c) Invertieren Sie die Matrix B zu B^{-1} und die Matrix C zu C^{-1}

d) Bestimmen Sie das Matrixprodukt A · B

3 Darstellungsmatrix

Sei $F = span_{\mathbb{R}}(cos, e, 1)$, wobei

$$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cos(x),$$

$$e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x,$$

$$1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1.$$

F ist ein Untervektorraum $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
Ferner sei

$$\phi : F \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0).$$

a) Zeigen Sie, dass B = (cos,e,1) eine Basis von F ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

c) Betrachten Sie die Basen B von F und $A = (1)$ von $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{BA}(\phi)$.

4 Untervektorraum

Die Menge M im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$M := \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von M.

5 Determinanten

Eine Matrix A heißt antisymmetrisch, wenn gilt: $A^t = -A$.

a) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie det A.

b) Sei A antisymmetrisch und n ungerade. Zeigen Sie, dass dann det A = 0 gilt.

6 Eigenwerte

6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ die einzigen Eigenwerte von A sind.

b) Finden Sie je eine Basis von $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i E_3)$ für $i = 1, 2$.

c) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalisierbar ist.

d) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Transformationsmatrix S an, so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt.

6.2 Matrixeponential

Berechnen Sie das Matrixeponential e^A

7 Gram-Schmidt-Verfahren

Bestimmen Sie die orthonormale Basis zu den Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$