Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016: Lösungen

1 Darstellungsmatrizen

1.1

Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{B,B'}(f)$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch $f(x,y,z) = (4x + y - 2z, -y + z)$ definiert ist bezüglich der Koordinatensysteme

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung:

Die Basisvektoren von B werden linear abgebildet:

- $f(1,0,1) = (2,1)$.

  Dieses Ergebnis muss als Linearkombination der Basisvektoren von B' dargestellt werden. Es gilt:

  I) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (1) = 2$ und II) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (-1) = 1$.
  Daraus folgt $\alpha = a_{11} = 1,5$ und $\beta = a_{21} = 0,5$.

- $f(0,-1,0) = (-1,1)$

  I) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (1) = -1$ und II) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (-1) = 1$.
  $\Rightarrow \alpha = a_{12} = 0$ und $\beta = a_{22} = -1$.

- $f(2,1,0) = (9,-1)$

  I) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (1) = 9$ und II) $\alpha \cdot (1) + \beta \cdot (-1) = -1$.
  $\Rightarrow \alpha = a_{13} = 4$ und $\beta = a_{23} = 5$.

Damit lautet die Darstellungsmatrix:

$$M_{BB'}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 Diagonalisierbarkeit

2.1

Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)^2$. Somit muss überprüft werden, welche Dimension der Eigenraum zum Eigenwert 3 hat. Ist diese 1, ist die Matrix nicht diagonalisierbar; ist sie 2, ist die Matrix diagonalisierbar, da die Dimension der algebraischen Vielfachheit entspricht.

$$rg(A - 3\mathbb{1}) = rg \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

A ist diagonalisierbar.

b)

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\chi_B(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$.

$$(B - 2\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfe die Anzahl der Eigenvektoren, die sich finden lassen. Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Das ist für die Vektoren $(a, 0, a)^T$ und $(0, a, 0)^T$ der Fall. Sei $a = 1$, der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist dann: Eig(B,2) = span$((1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T)$, Dim(Eig(B,2)) = 2.

B ist diagonalisierbar.

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet $\chi_C(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

$$(C - 2\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der zugehörige Eigenvektor ist gegeben durch $(a, -2a, a)^T$. Die Dimension des Eigenraumes ist somit $1 < 2 \Rightarrow$ C ist nicht diagonalisierbar.

2.2

Stellen Sie die Diagonalmatrix D folgender Matrix A auf:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$, damit folgt:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3

Stellen Sie die Diagonalmatrix D folgender Matrix A auf und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Transformationsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$, damit folgt:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Eigenwerte ist beliebig, allerdings muss sie der Reihenfolge der Eigenvektoren in der Transformationsmatrix entsprechen!

Berechne nun T und T^{-1}:

Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda = 1$:

$$A - 1\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{Z_2 - Z_1 Z_3 + Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Man erhält
I) $2x - y = 0$ und II) $y - 2z = 0 \Rightarrow x = 0,5y = z$.

Sei $x = 1$. Dann erhält man $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Analog berechnen sich v_2 und v_3 zu:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenräume sind also:

$$E_A(1) = \{\lambda \cdot (1,2,1)^T | \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$E_A(2) = \{\lambda \cdot (1,1,0)^T | \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$E_A(-1) = \{\lambda \cdot (0,0,1)^T | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Für die Transformationsmatrix erhält man somit:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für die Inverse:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Test bestätigt, dass gilt

$$T^{-1}AT = D.$$

3 Jordan-Normalform

3.1

Stellen Sie die Jordan-Normalform folgender Matrix auf:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda - 4$. Eine Nullstelle erraten ($\lambda = -1$), Polynomdivision und Mitternachtsformel ergeben: $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+4)^1$.

Somit existiert ein 1×1-Block zum Eigenwert -4.

$$rg(A + 1\mathbb{1}) = rg \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Damit gibt es $n - 1 = 3 - 1 = 2$ Jordan-Blöcke zum Eigenwert -1. Da -1 insgesamt 2 mal in der Matrix vorkommt, müssen es 1×1-Blöcke sein, die Jordan-Matrix ist insbesondere eine „echte“ Diagonalmatrix,

$$A_{JNF} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Überprüft man noch die Dimension des Eigenraumes dim(Eig(A,-1)) zum Eigenwert -1, sieht man dass sie genau der algebraischen Vielfachheit entspricht (Kriterium zur Diagonalisierbarkeit).

3.2

Stellen Sie die Jordan-Normalform folgender Matrix auf:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $(x-2)(x-1)^4$.

Lösung:

$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^1(\lambda-1)^4$.

Zum Eigenwert $\lambda = 2$ gibt es insgesamt 1 Eintrag, zu $\lambda = 1$ insgesamt 4. Es gilt

$$rg(A - 1\mathbb{1}) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Damit gibt es $n - 3 = 5 - 3 = 2$ Jordan-Blöcke zum Eigenwert 1. Dies können zwei 2×2-Blöcke oder ein 1×1- und ein 3×3-Block sein.

Überprüfe die Anzahl der 1×1-Jordan-Blöcke (0 oder 1) zum Eigenwert 1:
Berechne $rg((A - 1\mathbb{1})^2)$:

$$rg((A - 1\mathbb{1})^2) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Die Anzahl lautet: $5 - 2 \cdot 3 + 2 = 1$, somit gibt es einen 1×1-Jordan-Block und einen 3×3-Block zum Eigenwert 1.

Damit sieht die Jordan-Normalform bzw Diagonalmatrix folgendermaßen aus:

$$A_{JNF} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Gram-Schmidt-Verfahren zur Bestimmung einer Orthonormalbasis

4.1

Bestimmen Sie die orthonormale Basis zu den Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung:
Für den ersten Basisvektor wird einfachheitshalber $\overrightarrow{a}$ gewählt, da:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{a}}{|a|} = \overrightarrow{b_1}$$

Nach Gram-Schmidt berechnet sich der zweite Basisvektor b_2 indem man die Projektion auf b_2 von ihm abzieht

$$\overrightarrow{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 = \frac{\overrightarrow{B_2}}{|B_2|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend wird die Projektion von $\overrightarrow{c}$ auf die anderen beiden Basen bestimmt

$$\overrightarrow{B_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_3} = \frac{\overrightarrow{B_3}}{|B_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige orthonomale Basis $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{b_3}$ ist also die Basis der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}$

5 Matrixexponential

5.1

Bestimmen Sie das Matrixexponential von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit Summenformel und das Matrixexponentail von $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ mit Transformation durch die Eigenwerte und Eigenvektoren

Lösung:
zu A)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu B)
Das charakteristische Polynom ist:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, damit sind $EW_1 = -1$ und $EW_2 = 2$, die Eigenvektoren sind $EV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit der Transformationsbedingung aus der Vorlesung gilt:

$A = TST^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$e^A = T\ e^S\ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-1} + e^2 & -2e^2 + 2e^{-1} \\ e^2 - e^{-1} & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}$