Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016

1 Lineare Funktionen

1.1 Kern und Bild

Bestimmen Sie Dimension von/ und Kern sowie die Dimension des Bildes von A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 10 & -9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ **Lösung:**

$det(A) = 0 \rightarrow \exists Kern(A)$ mit $A \cdot \overrightarrow{k} = 0$

$k_1 - 3 \cdot K_2 + 5 \cdot k_3 = 0$
$-2 \cdot k_1 + 10 \cdot K_2 - 9 \cdot k_3 = 0$
$k_1 + 9 \cdot K_2 + 8 \cdot k_3 = 0$
das Lösen der LGS führt zu:
$\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} -23 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$
$dim(kern(A)) = 1$
$dim(bild(S)) = 3 - 1 = 2$

2 Basiswechsel

2.1

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix um von der Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die neue Basis $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu wechseln.
Lösung:

$$T = (a_1\ a_2)^{-1}(b_1\ b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2

Bestimmen Sie die Basis der Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ und finden Sie eine Transformationsmatrix um diese in der Basis a = $\{e_x, e_y, e_z\}$ darzustellen.
Lösung:
Die Matrix A wird auf Zeilen-Stufen Form gebracht und die Basisvektoren zu bestimmen.
$$A \xrightarrow{III - 5 \cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 4 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$
Das bedeutet, dass eine **mögliche** Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Die Transformationsmatrix berechnet sich nun durch:

$T = a^{-1} \cdot B$ beschrieben wird. Da $a = a^{-1}$ die Einheitsmatrix ist gilt die Transformationsmatrix $T = B$. B kann also schon durch die neue Basis dargestellt werden. Im Normalfall ist die Basis jedoch unterschiedlich und hier müsste noch eine Matrixmultiplikation durchgeführt werden.

3 Determinanten

3.1

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 7 & -8 & 11 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\det(\mathrm{A}) = -4 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = -27$
$\det(\mathrm{B}) = 2 \cdot 7 - (-4) \cdot 8 = 46$
$\det(\mathrm{C}) = 6 \cdot (-8) \cdot 2 + 2 \cdot 11 \cdot (-3) + (-4) \cdot 7 \cdot (-1) - (-4) \cdot (-8) \cdot (-3) - 6 \cdot 11 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 \cdot 2 = 0$

3.2

Berechnen Sie die inversen Matrizen über die Determinante und die adjunkte Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Berechnung der Determinante der Matrix A:
$\det(\mathrm{A}) = 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -12.$

Berechnung der transponierten Kofaktormatrix:

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} +(6) & -(-8) & +(-9) \\ -(0) & +(-4) & -(0) \\ +(-6) & -(0) & +(3) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,67 & 0,33 & 0 \\ 0,75 & 0 & -0,25 \end{pmatrix}$$

b) Berechnung der Determinante der Matrix B:
$\det(B) = 3\cdot 4\cdot 2 + 5\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - (1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 5\cdot 2 + 5\cdot 2\cdot 2) = 53 - 54 = -1.$

Berechnung der transponierten Kofaktormatrix:

$$\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}4&5\\2&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\\ -\det\begin{pmatrix}5&1\\2&2\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\\ +\det\begin{pmatrix}5&1\\4&5\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-2&-1&0\\-8&5&-1\\21&-13&2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-2&-8&21\\1&5&-13\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}-2&-8&21\\1&5&-13\\0&-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&8&-21\\-1&-5&13\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

c) $\det(C) = 5 - 4 = 1 \quad C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

3.3

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mithilfe des Entwicklungssatzes nach Laplace:

$$a)\ \begin{vmatrix}1&1&0\\2&-5&1\\4&3&1\end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix}2&0&5\\-3&2&4\\1&0&9\end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix}1&-1&1\\2&4&8\\3&5&3\end{vmatrix}$$

Lösung:

a) $\begin{vmatrix}1&1&0\\2&-5&1\\4&3&1\end{vmatrix}$

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt:

$$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\3&1\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}2&-5\\4&3\end{vmatrix} = -8-(-2) = -6$$

b) $\begin{vmatrix}2&0&5\\-3&2&4\\1&0&9\end{vmatrix}$

Entwicklung nach der zweiten Spalte ergibt:

$$2\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&9\end{vmatrix} = 2\cdot 13 = 26$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -28 - 18 - 2 = -48$$

4 Eigenwerte und -vektoren

4.1

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:
zu A)
Nach det(A-$\lambda \cdot \mathbb{1}) = 0$ wird die determinante nach Sarrus oder Laplace zu:
$-x^3 + 5x^2 - 2x - 8 = 0$
Geschicktes Raten (Ausprobieren der Zahlen(-1,0,1) führt dazu, dass $EW_1 = -1$. Mittels Polynomdivision und Mitternachtsformel finden sich die anderen beiden Eigenwerte mit $EW_2 = 2$ und $EW_3 = 4$.
mit $EW_1 = -1$ errechnet sich der Eigenvektor EV_1 durch das Lösen des LGS zu :
$EV_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ analog:
$EV_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $EV_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
zu B)
Nach det(B-$\lambda \cdot \mathbb{1}) = 0$
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$EW_1 = -1$ (-1 ausprobiert bzw. „geraten“), $EW_2 = 2$ und $EW_3 = 2$

mit $EW_1 = -1$ errechnet sich der Eigenvektor EV_1 durch das Lösen des LGS zu :
$EV_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ analog:
$EV_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und als linear unabhängiger Vektor zu EV_2 mit dem selben Eigenwert 2: $EV_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$