Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016: Lösungen

1 Lineare Abhängigkeit

1.1

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4),(3,t,11),(-1,-4,0).$$

Lösung:
Das zur Aufgabe gehörige LGS führt auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & t & 11 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix formen wir mittels elementarer Zeilenumformungen um zu

$$\overset{Z_2-3Z_1, Z_3+Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & t-9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{4Z_2+Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4t-37 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abhängigkeit der drei Vektoren ist gleichbedeutend damit, dass die zweite Zeile der Matrix verschwindet, also $4t-37=0$ oder $t=\frac{37}{4}$.

1.2

Stellen Sie den Vektor w jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

a) $w=(6,2,1), v_1=(1,0,1), v_2=(7,3,1), v_3=(2,5,8)$.

b) $w=(2,1,1), v_1=(1,5,1), v_2=(0,9,1), v_3=(3,-3,1)$.

Lösung:

a) $w=\frac{35}{48}v_1+\frac{37}{48}v_2-\frac{1}{16}v_3$.

b) $w=-v_1+v_2+v_3$.

1.3

Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$$u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie den Vektor $x=(-3,4,7)^T$ als Linearkombination von u,v und w dar.

b) Sind u, v und w linear unabhängig?

c) Sei ferner $y=(1,0,1)^T$. Bildet die Menge $\{u,v,y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

a) Gesucht sind α_1, α_2 und α_3 mit $x = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$. Dies führt auf ein LGS mit dem Tableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \overset{Z_2-2Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus folgt, dass $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = 1-2\alpha_3$ und $\alpha_2 = 2+\alpha_3$, es gibt also unendlich viele Möglichkeiten, x als Linear- kombination von u,v und w darzustellen.Wähle etwa $\alpha_3 = 0$, dann ist $\alpha_2 = 2$ und $\alpha_1 = 1$, also $x = u + 2v$.

b) Wir können in a) auch $\alpha_3 = 1$ wählen und erhalten $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = -1$, also $x = -u + 3v + w$. Mit der Darstellung von x aus a) ist also $u + 2v = x = -u + 3v + w$ und daher $2u - v - w = 0$. Der Nullvektor lässt sich also als Linearkombination der drei Vektoren darstellen (keine homogene Lösung), u, v und w sind damit linear abhängig.

c) Man muss die Gleichung $\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 y = 0$ betrachten. Diese führt auf ein homogenes LGS mit dem Tableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_1, Z_2-2Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_2-Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, die drei Vektoren sind also linear unabhängig und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

1.4

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

b) $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

a) Sei $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = 0$ mit $a, b, c, \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = -a \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

also auch

$$(-a)^2 = 2b^2 + 2bc \cdot \sqrt{6} + 3c^2 \in \mathbb{Q} \tag{2}$$

Gilt $b \neq 0$ und $c \neq 0$, so ist nach 2

$$\sqrt{6} = \frac{(-a)^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc} \in \mathbb{Q},$$

was ein Widerspruch ist. Ist entweder $b \neq 0$ und $c = 0$ oder $c \neq 0$ und $b = 0$, so folgt aus 1

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{oder} \sqrt{3} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},$$

dies ist ebenfalls ein Widerspruch. Also gilt $b = c = 0$, woraus nach Gleichung 1 auch $a = 0$ folgt. Damit sind $1, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.

b) Nein, es gilt $2 \cdot (4,5,6) - (1,2,3) = (7,8,9)$.

2 Basis und Dimension

2.1

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4,1,1,0,-2), v_2 = (0,1,4,-1,2), v_3 = (4,3,9,-2,2), v_4 = (1,1,1,1,1), v_5 = (0,-2,-8,2,-4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = span(v_1, ..., v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, ..., v_5$ aus, und kombinieren Sie jeweils $v_1, ..., v_5$ daraus linear.

Lösung:

a) Eine mögliche Basis, die man erhalten kann, ist
$w_1 = (1,1,1,1,1), w_2 = (0,1,4,-1,2), w_3 = (0,0,9,-7,0)$.

b) Es gelten folgende Zusammenhänge:
$v_3 = v_1 + 2v_2, \quad v_5 = -2v_2, \quad v_5 = v_1 - v_3$.
Daraus ergeben sich alle möglichen Basen für V aus $v_1, ..., v_5$:
$\{v_1, v_2, v_4\}, \quad \{v_1, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_4, v_5\} \quad \{v_2, v_3, v_4\} \quad \{v_3, v_4, v_5\}$.
Die Darstellungen der jeweils nicht in den Basen enthaltenen v_i ergeben sich aus den oben angegebenen Gleichungen.

2.2

Sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$v_1 = a+b+c, v_2 = 2a+2b+2c-d, v_3 = a-b-e, v_4 = 5a+6b-c+d+e, v_5 = a-c+3e, v_6 = a+b+d+e$.

Lösung:
Die Dimension des von den fünf Vektoren a,b,c,d,e aufgespannten Raumes ist kleiner oder gleich fünf. Nach dem Austauschsatz ist die Dimension eines Vektorraumes die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren, in unserem Fall höchstens fünf. Also sind die sechs Vektoren $v_1, ..., v_6$ in jedem Falle linear abhängig.

2.3

Es bezeichne P_n den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grad n.

a) Zeigen Sie: $e_k := (1+x)^k, k = 0,1,2,3$ bilden eine Basis von P_3. Welche Dimension hat dieser Raum?

b) Stellen Sie das Polynom $y = x^3 + 2x^2 + 1$ als Linearkombination der Basisvektoren $e_k, k = 0,1,2,3$ dar.

Lösung:

a) Zu zeigen ist: wenn $\sum_{k=0}^{3} \lambda_k e_k = 0$ gilt, dann folgt $\lambda_k = 0, k = 0,1,2,3$.
$0 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k (1+x)^k = \lambda_0 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+2x+x^2) + \lambda_3(1+3x+3x^2+x^3) = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3 \Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$. Der Raum hat die Dimension 4.

b) $x^3 + 2x^2 + 1$ erfordert nach a) $\lambda_3 = 1, \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Dies ergibt $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = -1, \lambda_0 = 2$, also $x^3 + 2x^2 + 1 = 2 - (1+x) - (1+x)^2 + (1+x)^3$.

3 Vektorräume

3.1

Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V mit den folgenden Operationen kein reeller Vektorraum ist:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ und } \lambda(a, b) = (\lambda a, 0)$$

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass eines der acht Gesetze (siehe Vorlesung) nicht erfüllt ist. Da die Addition der normalen Addition entspricht, gelten die ersten vier Gesetze. Somit wird die Multiplikation in diesem Fall mindestens ein Gesetz verletzen; betrachtet man das Gesetz $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, so sieht man sofort: $1(a, b) = (a, 0) \neq (a, b)$.

4 Rechnen mit Matrizen

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.1

Berechnen Sie die beiden Matrixprodukte $A \cdot B$ und $C \cdot D$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 2 \\ 10 & 8 & 1 \\ 22 & 29 & 6 \end{pmatrix}, C \cdot D = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}$$

4.2

Bestimmen Sie die Determinanten zu A,B,C und D

$det(A) = 0 + 40 + 0 - 15 - 24 = 1$
$det(B) = 0 + 2 + 0 - 0 - 2 - 0 = 0$
$det(C) = 4 - 6 = -2$
$det(D) = 4 - 4 = 0$

4.3

Bestimmen Sie A^T,B^T,C^T und D^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.4

Bestimmen Sie die inversen Matrizen A^{-1},B^{-1},C^{-1} und D^{-1}

B^{-1} und D^{-1} sind nicht invertierbar, dar $det = 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, C^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$