Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016: Lösungen

1 LGS

1.1

Gegeben seien folgende erweiterte Koeffizientenmatrizen $(A|b)$ in Zeilenstufenform:

$$a) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right), \quad b) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad c) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$d) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad e) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad f) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lesen Sie die Lösung des jeweiligen LGS (über $\mathbb{R}$) an der Zeilenstufenform ab und geben Sie diese an.

Lösung

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 5 \\ & & x_2 & = & 4. \end{array}$$

Hier ist also direkt: $x_2 = 4$, $x_1 = 5$.
Hinweis: Natürlich wären auch andere Bezeichnungen für die Variablen denkbar. Im folgenden bleiben wir aber bei der Konvention, dass die zur i.ten Spalte zugehörige Variable mit x_i bezeichnet wird. Die spezielle Matrix A in diesem Beispiel, wird übrigens als $(2D)$ Einheitsmatrix bezeichnet.

(b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & +x_2 & = & 5 \\ 0x_1 & 2x_2 & = & 4. \end{array}$$

Also haben wir $x_2 = 2$ und $x_1 = \frac{5-x_2}{3} = 1$.

(c) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & +2x_2 & = & 1 \\ 0x_1 & +0x_2 & = & 3. \end{array}$$

Die letzte Zeile lautet also $0 = 3$, was in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist. Also hat dieses LGS keine Lösung.

(d) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 5 \\ & x_2 & & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3. \end{array}$$

Wir lesen also direkt ab $x_3 = 3$, $x_2 = 4$, $x_1 = 5$. Auch in diesem Fall hat die Matrix A eine spezielle Form. Sie wird als $(3D)$ Einheitsmatrix bezeichnet.

(e) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & x_3 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3. \end{array}$$

Somit ergibt sich $x_3 = 3$, $x_2 = \frac{4-x_3}{3} = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{3-3x_3-3x_2}{3} = -\frac{7}{3}$

(f) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & & & = & 4 \\ & 4x_2 & & = & 4 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Da die letzte Gleichung immer erfüllt ist und keine Gleichung x_3 enthält, können wir $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = 1$ und aus der ersten folgt $x_1 = 2$- Es gibt also unendlich viele Lösungen. Diese haben immer die Form $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \lambda$ beliebig.

1.2

Lösen Sie die folgenden LGS (über $\mathbb{R}$):

$$\text{a)} \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array} , \text{ b)} \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} .$$

Stellen Sie dazu das jeweilige LGS in der Form $(A|b)$ da und bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform.

Lösung:

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftarrow Z_1/2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 3Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & 1 & 13/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & 1 & 13/2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - \frac{11}{2} Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow -\frac{2}{9} Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ausgeschrieben als LGS bedeutet dies:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3/2x_2 & & & = & -1/2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Rückwärtssubstitution von der letzten Zeile führt auf

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. die Lösung ist eindeutig.

(b) Wir erhalten

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftarrow Z_1/2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 4Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3/2x_2 & & & = & -1/2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Rückwärtssubstitution von der vorletzten Zeile führt mit Setzung $x_3 = \lambda_3$ auf

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda_3 \\ 2 - \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

die Lösung ist also nicht eindeutig. (Die Lösung stellt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ dar.)

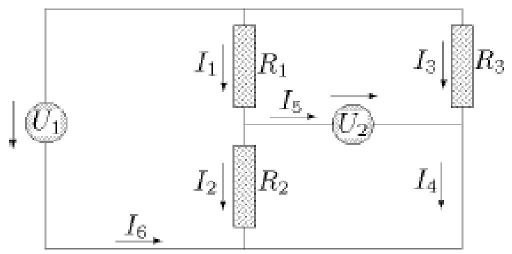
1.3

Die *Kirchhoffschen Regeln* für Gleich- und Wechselstromkreise lauten:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null;
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

a) Stellen Sie das LGS für den skizzierten Stromkreis auf (Vorzeichen entsprechend der Pfeilrichtung, $U = R \cdot I$).

b) Berechnen Sie die Ströme I_1 bis I_6 für $U_1 = 2\,V$, $U_2 = 1\,V$, $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$.



Lösung:

a)
- $-I_1 - I_3 - I_6 = 0$ (Knoten links oben)
- $I_1 - I_2 - I_5 = 0$ (Knoten links mitte)
- $I_2 + I_4 + I_6 = 0$ (Knoten links unten)
- $I_3 - I_4 + I_5 = 0$ (Knoten rechts mitte)
- $U_1 - I_1R_1 - I_2R_2 = 0$ (Masche links)
- $I_1R_1 + U_2 - I_3R_3 = 0$ (Masche rechts oben)
- $I_2R_2 - U_2 = 0$ (Masche rechts unten)

LGS in Matrixform:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -R_1 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & -U_2 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_2 \end{array}\right)$$

b) es folgt bspw: $I_2R_2 = U_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1\,V}{1\,\Omega} = 1\,A$

Analoges Lösen ergibt schließlich:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.4

Entscheiden Sie welche der untenstehenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme mit Unbekannten in $\mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort:

a) Wenn ein LGS nicht lösbar ist, so ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer als die Anzahl der Unbekannten des LGS.

b) Jedes homogene LGS besitzt eine Lösung.

c) Ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.

d) Jedes homogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat eine nichttriviale Lösung.

Lösung:

a) Falsch. Beispiel $0x_1 = 1$. In diesem Fall ist der Rang von $(A|b) = (0|1)$ gleich 1.

b) Richtig. Jedes homogene LGS besitzt die triviale Lösung (d.h. alle Unbekannten haben den Wert Null).

c) Falsch. Eine der Gleichungen könnte z.B. $0 = 1$ sein (oder auch $x_1 = 1$, $x_1 = 2$ o.ä.). Jedoch: Besitzt ein derartiges LGS eine Lösung, dann auch unendlich viele.

d) Falsch. Beispiel: $x_1 + x_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$ hat nur die triviale Lösung.

1.5

In vielen Anwendungen treten lineare Optimierungsprobleme auf. Ein lineares Optimierungsproblem ist z.B. ein Problem der folgenden Form: Man bestimmte den minimalen Wert von x_5 unter den Nebenbedingungen:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & + & a_{15}x_5 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & + & a_{25}x_5 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & + & a_{35}x_5 & = & b_3, \end{array}\right. \tag{2}$$

und

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

wobei a_{ij} und b_i für $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 5$, gegebene Größen sind.

a) Wir betrachten folgende Aufgabe: In einer Raffinerie soll aus zwei verschiedenen Sorten Rohöl (R_1 und R_2) Benzin hergestellt werden. Der chemische Prozess findet in einem Tank statt. Folgende Produktionsvorgaben sind einzuhalten:

- Um einen stabilen chemischen Prozess zu ermöglichen, darf die Menge von R_2 die Menge von R_1 nur um maximal 2 Barell übersteigen;
- Der Tank fasst maximal 4 Barell Rohöl;
- Aus einem Barell R_1 wird 1/4 Barell Benzin gewonnen; aus einem Barell R_2 wird 1/2 Barell Benzin gewonnen.

Die Frage ist, wie viel Benzin unter den obigen Produktionsvorgaben in dem Tank maximal hergestellt werden kann. Formulieren Sie diese Frage als lineares Optimierungsproblem der obigen Form (geben Sie also die a_{ij}, b_i an).

Verwenden Sie folgende Bedeutungen für die Variablen $x_1, \ldots, x_5$:

x_1 : Verwendetes Rohöl R_1 (in Barell),
x_2 : Verwendetes Rohöl R_2 (in Barell),
x_3 : Theoretisch zusätzlich nutzbarer Überschuss von R_2 gegenüber R_1 im Tank (in Barell),
x_4 : Menge von Rohöl, die noch in den Tank passen würde (in Barell),
x_5 : Menge an hergestelltem Benzin (in 1/4 Barell).

b) Berechnen Sie zuerst die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (2) mit den konkreten Werten für a_{ij} und b_i aus (a), und ermitteln Sie dann unter Berücksichtigung der Bedingung (3) diejenige Lösung, welche den Wert von x_5 maximiert.

a) Die erste Produktionsbedingung besagt $x_2 - x_1 \leq 2$, also

$$x_2 - x_1 + x_3 = 2.$$

Die zweite Produktionsbedingung besagt $x_1 + x_2 \leq 4$, also

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4.$$

Die dritte Produktionsbedingung besagt, wieviel Benzin wir herstellen können. D.h.

$$x_5 = x_1 + 2x_2.$$

Diese Menge x_5 an hergestellten Benzin ist zu maximieren. Natürlich sind alle auftretenden Variablen $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$. Damit haben wir das lineare Optimierungsproblem aufgestellt: Maximiere x_5 unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 4 \\ -x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & = & 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

b) Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\begin{array}{c} Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{Z_3 \leftarrow Z_3 + \frac{3}{2} Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{Z_3 \leftarrow 2Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right).$$

Wir lesen also die zwei-parametrige Lösung ab:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu,$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

Das sind also 5 Ungleichungen in zwei Variablen (λ und μ). Wir können diese damit graphisch darstellen, siehe Abbildung 1.

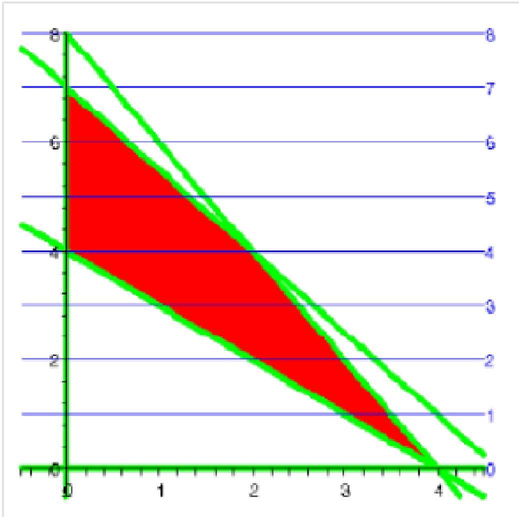


Abbildung 1: Rot: Lösungsmenge. Blau: Werte von x_5. Nach oben sind aufsteigende Werte von μ dargestellt, nach rechts aufsteigende Werte von λ.

Der zu maximierende Wert $x_5 = \mu$ nimmt also im erlaubten Bereich in der linken oberen Ecke den maximalen Wert 7 an.

Bemerkung: Deutlich leichter wird die Zeilenumformung in dieser Aufgabe, wenn man von der durch die Variablenindizes vorgegebenen Reihenfolge der Zeilenumformungen abweicht. Man kann sich auch überlegen, dass das ursprüngliche lineare Optimierungsproblem auch gleich mit zwei Variablen und lauter Ungleichungen (also keinen Gleichungen) formuliert hätte werden können. In dem Fall hätte man sofort die graphische Darstellung zeichnen können.

2 Gruppen

2.1

Es sei $(G, \circ)$ eine nicht notwendig abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass gilt:

1. Für jedes neutrale Element $e \in G$ gilt $a \circ e = a \, \forall a \in G$,
   d.h. jedes linksneutrale Element e ist auch rechtsneutral. Deshalb spricht man auch einfach von einem neutralen Element.
2. Aus $a' \circ a = e$ folgt jeweils auch $a \circ a' = e$,
   d.h. jedes linksinverse Element a' ist auch rechtsinvers. Deshalb spricht man auch einfach von einem inversen Element.
3. Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$.
   Bereits aus $x \circ a = a$ oder $a \circ x = a$ für ein $a \in G$ folgt $x = e$.
4. Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a' \in G$.
   Deshalb ist es möglich, diesem Inversen ein eigenes Symbol zu geben: in additiven Gruppe schreibt man -a, sonst meist a^{-1}.

Hinweis: Beweisen Sie erst (b), dann (a), (c), (d).

Lösung:

b) *Ein linksinverses Element a' ist auch rechtsinvers:* Sei a' linksinvers zu a. Wir wählen ein zu a' linksinverses b, dann ist $a' \circ a = e = b \circ a'$. Somit folgt

$$a \circ a' = (e \circ a) \circ a' = ((b \circ a') \circ a) \circ a' = ((b \circ (a' \circ a)) \circ a' = (b \circ e) \circ a' = b \circ (e \circ a') = b \circ a' = e.$$

a) *Ein linksneutrales Element e ist auch rechtsneutral:* Zu $a \in G$ wählen wir ein linksinverses a', dann ist $a' \circ a = e$ und nach (a) auch $a \circ a' = e$. Es folgt

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a.$$

c) *Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt:* Seien $e, e' \in G$ neutrale Elemente dann ist

$$e' = e \circ e' = e.$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass e linksneutrales Element ist, und e' rechtsneutrales Element (und das dürfen wir ja auch, nach (a)).

d) *Das linksinverse (und damit nach (a) rechtsinverse) Element a' ist eindeutig bestimmt:* Seien a' und b' linksinvers zu a, also $a' \circ a = b' \circ a = a \circ a' = e$. Dann ist

$$a' = e \circ a' = (b' \circ a) \circ a' = b' \circ (a \circ a') = b' \circ e = b'.$$

2.2

Sei G eine Gruppe mit $aa = e \, \forall a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Lösung:
Die Behauptung lautet $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Seien $a, b \in G$ beliebig. Nach der Voraussetzung gilt wegen der Eindeutigkeit von inversen Elementen $a = a^{-1}$ und $b = b^{-1}$ sowie $ab = (ab)^{-1}$. Daraus folgt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

also $ab = ba$, was zu beweisen war.

3 Abildungen

3.1

Nennen Sie jeweils 3 injektive, 3 surjektive und 3 bijektive Funktionen.

injektiv: x, x^5, x^3
surjektiv: x, x^2 auf $\mathbb{R}^+$, $sin(x)$ auf $x|-1 < x < 1$
bijektiv: x, e^x auf $\mathbb{R}^+$, x^2 auf $\mathbb{C}$

3.2

Nennen Sie jeweils 3 nicht-injektive, 3 nicht-surjektive und 3 nicht-bijektive Funktionen.

nicht-injektiv: x^2, $sin(x)$, $(x-3)(x-1)$
nicht-surjektiv: e^x auf $\mathbb{R}$,jede abschnittsweise definierte Funktion mit Loch, Funktionen mit stetig behebbarer Definitioslücke
nicht-bijektiv: x^2, e^x auf $\mathbb{R}$, x^2 auf $\mathbb{C}$

4 komplexe Zahlen

4.1

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z_1 = 3 + 16i$, $z_3 = (9 + 2i)(8 + 16i)$ und $z_3 = (a + ib)(x + iy)$

$Re(z_1) = 3$, $Im(z_1) = 16$;
$Re(z_2) = 40$, $Im(z_2) = 160$;
$Re(z_3) = ax - by$, $Im(z_3) = ay + bx$;

4.2

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z = \frac{1}{3+4i}$

$$z = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{25} \tag{1}$$

$Re(z) = \frac{3}{25}$, $Im(z) = \frac{-4i}{25}$;

5 Mengen

Die Menge $A = \{x|x \in \mathbb{R}^+\}$, die Menge B {Alle ungeraden Zahlen} und die Menge $C = -5, 2, 16, 9, 3$ seien gegeben.

5.1

Bestimmen Sie Teil und Obermenge der Kombination aus A und B.

$T = A \cap B = \{x|x \in B \vee x \in \mathbb{R}^+\}$ „Alle positiven ungeraden Zahlen"
$O = A \cup B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$ „Die Positiven Zahlen und alle ungeraden negativen Zahlen"

5.2

Wie groß sind die Mächtigkeiten der Mengen?

$|A| = \infty$, $|B| = \infty$, $|C| = 5$

5.3

Bestimmen Sie $A \cup B$, $B \cup C$ und $A \cup C$

$A \cup B = O$ siehe oben
$B \cup C = \{x|x \in B \vee x = 16\}$ „Alle ungeraden Zahlen und die 16"
$A \cup C = \{x|x \in \mathbb{R}^+ \vee x = -15\}$ „Alle postitiven Zahlen und die -15"

5.4

Bestimmen Sie $A \cap B$, $B \cap C$ und $A \cap C$

$A \cap B = T$ siehe oben
$B \cap C = \{-5, 9, 3\}$
$A \cap C = \{2, 16, 9, 3\}$

5.5

Bestimmen Sie $A \setminus B$, $B \setminus C$ und $A \setminus C$

$A \setminus B = x|x = 2n, n \in \mathbb{N}$„Alle geraden positiven Zahlen"
$B \setminus C = B \setminus \{-5, 9, 3\}$
$A \setminus C = \mathbb{R}^+ \setminus \{2, 16, 9, 3\}$

5.6

Bestimmen Sie $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$

$\overline{A} = \mathbb{R}_0^-$
$\overline{B} = \{x|x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ „Alle geraden Zahlen"
$\overline{C} = \mathbb{R} \setminus C$