Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra 2015/2016

1 LGS

1.1

Gegeben seien folgende erweiterte Koeffizientenmatrizen $(A|b)$ in Zeilenstufenform:

$$a)\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right), \quad b)\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad c)\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad e)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad f)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lesen Sie die Lösung des jeweiligen LGS (über $\mathbb{R}$) an der Zeilenstufenform ab und geben Sie diese an.

1.2

Lösen Sie die folgenden LGS (über $\mathbb{R}$):

$$\text{a)}\ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array} \quad , \text{b)}\ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \quad .$$

Stellen Sie dazu das jeweilige LGS in der Form $(A|b)$ da und bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform.

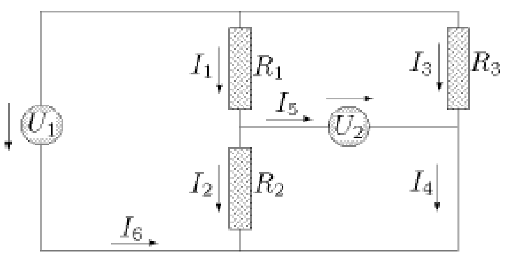
1.3

Die *Kirchhoffschen Regeln* für Gleich- und Wechselstromkreise lauten:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null;
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

a) Stellen Sie das LGS für den skizzierten Stromkreis auf (Vorzeichen entsprechend der Pfeilrichtung, $U = R \cdot I$).

b) Berechnen Sie die Ströme I_1 bis I_6 für $U_1 = 2\,V$, $U_2 = 1\,V$, $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$.



1.4

Entscheiden Sie welche der untenstehenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme mit Unbekannten in $\mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort:

a) Wenn ein LGS nicht lösbar ist, so ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer als die Anzahl der Unbekannten des LGS.

b) Jedes homogene LGS besitzt eine Lösung.

c) Ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.

d) Jedes homogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat eine nichttriviale Lösung.

1.5

In vielen Anwendungen treten lineare Optimierungsprobleme auf. Ein lineares Optimierungsproblem ist z.B. ein Problem der folgenden Form: Man bestimmte den minimalen Wert von x_5 unter den Nebenbedingungen:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & + & a_{15}x_5 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & + & a_{25}x_5 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & + & a_{35}x_5 & = & b_3, \end{array}\right. \tag{2}$$

und

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

wobei a_{ij} und b_i für $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 5$, gegebene Größen sind.

a) Wir betrachten folgende Aufgabe: In einer Raffinerie soll aus zwei verschiedenen Sorten Rohöl (R_1 und R_2) Benzin hergestellt werden. Der chemische Prozess findet in einem Tank statt. Folgende Produktionsvorgaben sind einzuhalten:

   - Um einen stabilen chemischen Prozess zu ermöglichen, darf die Menge von R_2 die Menge von R_1 nur um maximal 2 Barell übersteigen;
   - Der Tank fasst maximal 4 Barell Rohöl;
   - Aus einem Barell R_1 wird 1/4 Barell Benzin gewonnen; aus einem Barell R_2 wird 1/2 Barell Benzin gewonnen.

   Die Frage ist, wie viel Benzin unter den obigen Produktionsvorgaben in dem Tank maximal hergestellt werden kann. Formulieren Sie diese Frage als lineares Optimierungsproblem der obigen Form (geben Sie also die a_{ij}, b_i an).

   Verwenden Sie folgende Bedeutungen für die Variablen $x_1, \ldots, x_5$:

   x_1 : Verwendetes Rohöl R_1 (in Barell),
   x_2 : Verwendetes Rohöl R_2 (in Barell),
   x_3 : Theoretisch zusätzlich nutzbarer Überschuss von R_2 gegenüber R_1 im Tank (in Barell),
   x_4 : Menge von Rohöl, die noch in den Tank passen würde (in Barell),
   x_5 : Menge an hergestelltem Benzin (in 1/4 Barell).

b) Berechnen Sie zuerst die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (2) mit den konkreten Werten für a_{ij} und b_i aus (a), und ermitteln Sie dann unter Berücksichtigung der Bedingung (3) diejenige Lösung, welche den Wert von x_5 maximiert.

2 Gruppen

2.1

Es sei $(G, \circ)$ eine nicht notwendig abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass gilt:

1. Für jedes neutrale Element $e \in G$ gilt $a \circ e = a \, \forall a \in G$,
   d.h. jedes linksneutrale Element e ist auch rechtsneutral. Deshalb spricht man auch einfach von einem neutralen Element.

2. Aus $a' \circ a = e$ folgt jeweils auch $a \circ a' = e$,
   d.h. jedes linksinverse Element a' ist auch rechtsinvers. Deshalb spricht man auch einfach von einem inversen Element.

3. Es gibt genau ein neutrales Element $e \in G$.
   Bereits aus $x \circ a = a$ oder $a \circ x = a$ für ein $a \in G$ folgt $x = e$.

4. Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a' \in G$.
   Deshalb ist es möglich, diesem Inversen ein eigenes Symbol zu geben: in additiven Gruppe schreibt man -a, sonst meist a^{-1}.

Hinweis: Beweisen Sie erst (b), dann (a), (c), (d).

2.2

Sei G eine Gruppe mit $aa = e \, \forall a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

3 Abildungen

3.1

Nennen Sie jeweils 3 injektive, 3 surjektive und 3 bijektive Funktionen.

3.2

Nennen Sie jeweils 3 nicht-injektive, 3 nicht-surjektive und 3 nicht-bijektive Funktionen.

4 komplexe Zahlen

4.1

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z_1 = 3 + 16i$, $z_3 = (9 + 2i)(8 + 16i)$ und $z_3 = (a + ib)(x + iy)$

4.2

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z = \frac{1}{3+4i}$

5 Mengen

Die Menge $A = \{x|x \in \mathbb{R}^{+}\}$, die Menge B {Alle ungeraden Zahlen} und die Menge $C = -5, 2, 16, 9, 3$ seien gegeben.

5.1

Bestimmen Sie Teil und Obermenge der Kombination aus A und B.

5.2

Wie groß sind die Mächtigkeiten der Mengen?

5.3

Bestimmen Sie $A \cup B$, $B \cup C$ und $A \cup C$

5.4

Bestimmen Sie $A \cap B$, $B \cap C$ und $A \cap C$

5.5

Bestimmen Sie $A \setminus B$, $B \setminus C$ und $A \setminus C$

5.6

Bestimmen Sie $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$