Ferienkurs Quantenmechanik - Probeklausur

Sommersemester 2015

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeißer
Fakultät für Physik
Technische Universität München

18. September 2015

Probeklausur

Aufgabe 1 FRAGEN (10 BE):

a) *Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung mit Potential in drei Dimensionen?*

b) *Wie berechnet sich der Erwartungswert eines Operators $\hat{O}$ in Orts- und Impulsdarstellung?*

c) *Wie hängt die Energie im H-Atom von der Hauptquantenzahl ab?*

d) *Nennen Sie die Unschärferelation für die zwei hermiteschen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.*

e) *Wie wirken die Operatoren $\vec{L}^2$ und L_z auf den Zustand $|l, m\rangle$?*

f) *Wann ist ein hermitescher Operator $\hat{A}$ eine Erhaltungsgröße?*

g) *Nennen Sie die Quantenzahlen eines vollständigen Satzes von Eigenfunktionen für das H-Atom und deren Wertebereiche.*

h) *Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi(x) = d \cdot \theta(a - |x|)$, $a > 0$.*

i) *Beschreiben Sie den Weg um Operatoren zu konstruieren, die ein Teilchen mit Spin $\frac{5}{2}$ beschreiben (sie müssen **nicht** explizit angegeben werden!).*

j) *Es seien Λ_i, $i = 1, 2, 3$, drei $n \times n$-Matrizen, welche den Spin eines Teilchens beschreiben. Handelt es sich jeweils um Bosonen oder um Fermionen (mit Begründung!), wenn*

I) *n gerade ist?*

II) *n ungerade ist?*

Aufgabe 2 AUF-/ABSTEIGEOPERATOREN (7 BE):
Geben Sie den resultierenden Zustand (sofern er existiert) zu folgenden Operationen an:

a) $L^2 L_+ \left|2, 1\right\rangle$

b) $L_- \left|1, 2\right\rangle$

c) $L_+ L^2 L_+ \left|7, 5\right\rangle$

d) $S_- S^2 \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

e) $S^2 S_+ \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

f) $S^2 \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\right\rangle$

g) $\left\langle 3\right| a^\dagger a^\dagger a a^\dagger$

Aufgabe 3 SPIN UND DREHIMPULS (6 BE):
Konstruieren Sie für $j = \frac{3}{2}$ die Matrixdarstellung der Operatoren J_+, J_-, J_x, J_y, J_z in der Basis der Eigenzustände $\left|j, m\right\rangle$ der Operatoren J^2, J_z.
Hinweis: $J_\pm = J_x \pm i J_y \qquad J_\pm \left|j, m\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\left|j, m \pm 1\right\rangle$

Aufgabe 4 STÖRUNGSRECHNUNG (7 BE):
Betrachten Sie das Morse-Potential:

$$V(x) = V_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-a(x - x_e)}\right]^2 \qquad a, x_e > 0$$

(a) Finden Sie das Minimum.

(b) Entwickeln Sie das Morse-Potential in harmonischer Ordnung um das Minimum und schreiben Sie die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung auf.

(c) Wie lauten die zugehörigen Energieeigenwerte?

(d) Betrachten Sie nun eine kubische Störung $-\lambda x^3$, $\lambda > 0$, die auf das harmonische Potential wirkt.
Berechnen Sie die ersten beiden Korrekturen zur Eigenenergie des harmonischen Oszillators. Verwenden Sie dazu:

$$E_n^{(1)} = \langle \Psi_n^{(0)} | H_1 | \Psi_n^{(0)} \rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left| \langle \Psi_m^{(0)} | H_1 | \Psi_n^{(0)} \rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a)$$

Betrachten Sie dabei explizit die Zustände $\left|0\right\rangle$ und $\left|1\right\rangle$.

(e) Wie lauten die Energieeigenwerte des gestörten harmonischen Oszillators?