

## Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben Sommersemester 2015

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeisser  
Fakultät für Physik  
Technische Universität München  
17. September 2015

### 1 Elektromagnetische Felder

#### Aufgabe 1 (\*\*)

Betrachten Sie die Schrödingergleichung zur Beschreibung eines Teilchens mit Ladung  $-e$  im elektromagnetischen Feld

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 \Psi(\vec{r}, t) + e\phi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung invariant ist unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &\rightarrow \Psi'(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha(\vec{r}, t)} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \alpha(\vec{r}, t) \\ \phi(\vec{r}, t) &\rightarrow \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $\alpha(\vec{r}, t)$ . Interpretieren Sie das Ergebnis.

(b) Der Operator für die Geschwindigkeit des Teilchens ist definiert über die Forderung

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle$$

Berechnen Sie  $\vec{v}$ .

Hinweis: Benutzen Sie das Ehrenfest Theorem.

(c) Wie verhält sich  $\langle \vec{v} \rangle$  unter der Transformation.

**Aufgabe 2 (\*\*)**

Der Hamiltonoperator für ein (positiv) geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ist

$$H_{elm} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 - e\Phi$$

Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t(\Psi^*\Psi) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  gilt, wenn der Stromdichtevektor  $\vec{j}$  gleich

$$\vec{j} = \frac{1}{2m} \left\{ i\hbar(\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi) - 2e\vec{A}\Psi^*\Psi \right\}$$

ist. Beweisen Sie weiterhin, dass  $\vec{j}$  eichinvariant ist.

**Aufgabe 3 (\*\*\*)**

Betrachten Sie das Wasserstoffatom in einem schwachen homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Bei Berücksichtigung des Elektronenspins lautet der zugehörige Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 - \frac{\alpha\hbar c}{r} + \mu_B\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

mit dem Bohrschen Magneton  $\mu_B = e\hbar/2m$  und den Pauli-Spinmatrizen  $\vec{\sigma}$ . Bestimmen Sie (zu linearer Ordnung in  $B$ ) die Eigenenergien  $E(n, m_l, m_s)$ .

## 2 Variationsmethode

**Aufgabe 4 (\*)**

Benutzen Sie das Variationsverfahren zur Abschätzung der Grundzustandsenergie des linearen harmonischen Oszillators mit Hilfe des Ansatzes:

$$\phi(q) = \frac{1}{\alpha^2 + q^2}$$

Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{dq}{(\alpha^2 + q^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3}; \quad \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(\alpha^2 + q^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha},$$

$$\int_0^\infty \frac{dq}{(\alpha^2 + q^2)^3} = \frac{3\pi}{16\alpha^5}; \quad \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(\alpha^2 + q^2)^4} = \frac{\pi}{32\alpha^5}.$$

**Aufgabe 5 (\*)**

Gegeben Sei ein Teilchen in einem Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden und der Breite  $L$ .

Als Versuchswellenfunktion sei

$$\psi(x) = A \begin{cases} L - |x| & \text{für } |x| < L \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases} \quad (1)$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Normierungskonstante  $A$ .
2. Schätzen Sie die Grundzustandsenergie ab und vergleichen sie es mit dem exakten Resultat  $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2}$ .

### 3 Störungstheorie

**Aufgabe 6 (\*\*)**

Berechnen Sie zu erster Ordnung in  $\lambda$  die Energieverschiebung im Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators, wenn das Störpotential  $H_1 = \lambda x^4$  zum Hamiltonoperator  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$  hinzuaddiert wird. Berechnen Sie auch die Korrektur in zweiter Ordnung  $\delta E_0^{(2)} \propto \lambda^2$

**Aufgabe 7 (\*\*\*)**

Zum Coulombpotential werde ein Korrekturterm proportional zu  $1/r^2$  hinzuaddiert, d.h.

$$V(r) = -\frac{\alpha \hbar c}{r} + \frac{\hbar^2 g}{2mr^2}$$

mit  $g > -1/4$ . Die zufällige Entartung des Wasserstoffspektrums bzgl.  $l$  wird nun aufgehoben. Berechnen Sie das zugehörige Energiespektrum  $E_{nl}$  exakt und entwickeln Sie die Spektralformel bis zur Ordnung  $g$ . Vergleichen Sie den Term linear in  $g$  mit dem Erwartungswert des Störpotentials.

Hinweis: Die Radialgleichung für  $u(\rho)$  erfährt folgende Modifikation:  $l(l+1) \rightarrow l(l+1) + g = l'(l'+1)$ .

Hinweis: Es gilt  $\langle r^{-2} \rangle = [a_B^2 n^3 (l+1/2)]^{-1}$

**Aufgabe 8 (\*\*\*)**

Betrachten Sie den zweidimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

Berechnen Sie die Energieverschiebung aufgrund eines Störpotentials  $H_1 = \epsilon m \omega^2 xy$  im Grundzustand und im (entarteten) ersten angeregten Zustand in erster Ordnung Störungstheorie. Interpretieren Sie ihr Resultat. Lösen Sie das Problem nun exakt, beispielsweise durch Diagonalisierung der quadratischen Form für das Gesamtpotential, und vergleichen Sie mit einer Berechnung der Grundzustandsverschiebung in zweiter Ordnung Störungstheorie.

**Aufgabe 9 (\*\*)**

Ein starrer Rotator mit dem Trägheitsmoment  $I$  werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2 \cdot I} \vec{L}^2$$

beschrieben, wobei  $\vec{L}$  der Drehimpulsoperator ist.

1. Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?
2. Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{\mu}$ . In einem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$  führt das zu einem Wechselwirkungsterm

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta$$

$\hat{\mathcal{H}}_1$  soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nicht verschwindende Korrektur für die Grundzustandsenergie des Rotators.

**Hinweis:** Es gilt für die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  :  $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$  und  $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

Drücken Sie  $\hat{\mathcal{H}}_1$  durch die Kugelflächenfunktionen aus und verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation.

## 4 WKB-Näherung

**Aufgabe 10 (\*)**

Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der WKB-Wellenfunktion tief im klassisch verbotenen Bereich, also im Grenzfall  $x \rightarrow \infty$ , für das lineare Potential  $V(x) = F \cdot x$  mit  $F > 0$ .

**Aufgabe 11** (\*\*)

Die WKB-Näherung ist ein Näherungsverfahren für eindimensionale Probleme. Sie kann aber auch auf Probleme erweitert werden, die in Produktwellen zerfallen.

- (1) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für eine Radialwelle in einem kugelsymmetrischen Potential  $V(r)$ ?
- (2) Wie lautet die Quantisierungsbedingung (WKB-Gleichung) für den Radialwellenanteil?
- (3) Benutzen Sie ihre Ergebnisse, um die Energieniveaus von Wasserstoff in der WKB-Näherung zu berechnen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für  $n \gg 1/2$  und  $n \gg l$  mit den exakten Bohr-Niveaus

$$E_n = -\left(\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right) \frac{1}{n^2}$$

Hinweis:  $\int_a^b \frac{dx}{x} \sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$