Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben
Sommersemester 2014

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeißer
Fakultät für Physik
Technische Universität München

18. September 2015

Drehimpuls, Spin
und
H-Atom

Aufgabe 1 (*)
Beweise die Relationen

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L^2, L_\pm] = 0$$

mithilfe der Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls.

Lösung:

$$\begin{aligned}
[L_+, L_-] &= [L_x + iL_y, L_x - iL_y] = \underbrace{[L_x, L_x]}_{=0} + i\underbrace{[L_y, L_x]}_{=-i\hbar L_z} - i\underbrace{[L_x, L_y]}_{=i\hbar L_z} + \underbrace{[L_y, L_y]}_{=0} \\
&= 2\hbar L_z \\
[L_z, L_\pm] &= [L_z, L_x \pm iL_y] = \underbrace{[L_z, L_x]}_{i\hbar L_y} \pm i\underbrace{[L_z, L_y]}_{=-i\hbar L_x} \\
&= \pm\hbar L_x + i\hbar L_y = \pm\hbar(L_x \pm iL_y) = \pm\hbar L_\pm \\
[L^2, L_\pm] &= \underbrace{[L^2, L_x]}_{=0} \pm i\underbrace{[L^2, L_y]}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*)
Wir bezeichnen die simultanen Eigenkets von L^2 und L_z mit $|l,m\rangle$, $l \in \mathbb{N}$ und $-l \leq m \leq +l$. Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt:

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,|l, m \pm 1\rangle$$

Drücke L_x und L_y durch $L_\pm$ aus und zeige die Relationen

$$\langle l,m|L_xL_y + L_yL_x|l,m\rangle = 0$$
$$\langle l,m|L_x^2 - L_y^2|l,m\rangle = 0$$

Lösung: Verwendung der Definition von Auf- und Absteiger und Invertierung zu:

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad L_y = \frac{i}{2}(L_+ - L_-)$$

erlaubt es und die gesuchten Erwartungswerte umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
\langle l,m|L_xL_y + L_yL_x|l,m\rangle &= \frac{1}{4i}\langle l,m|\left(\Big[(L_+ + L_-)(L_+ - L_-) + (L_+ - L_-)(L_+ + L_-)\Big]|l,m\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4i}\langle l,m|\left(\Big[2L_+^2 - 2L_-^2 \underbrace{-L_+L_- + L_-L_+ + L_+L_- - L_-L_+}_{=0}\Big]|l,m\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2i}\langle l,m|\left(L_+^2|l,m\rangle\right) - \frac{1}{2i}\langle l,m|\left(L_-^2|l,m\rangle\right) = 0
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, da $L_+^2|l,m\rangle \sim |l,m+2\rangle$ und $\langle l,m|l,m+2\rangle = 0$ wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen. L_-^2 folgt analog.

$$\begin{aligned}
\langle l,m|L_x^2 - L_y^2|l,m\rangle &= \langle l,m|\left(\Big[\frac{1}{2^2}(L_+ + L_-)(L_+ + L_-) - \frac{1}{(2i)^2}(L_+ - L_-)(L_+ - L_-)\Big]|l,m\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\langle l,m|\left(\Big[(L_+ + L_-)(L_+ + L_-) + (L_+ - L_-)(L_+ - L_-)\Big]|l,m\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\langle l,m|\left(\Big[2L_+^2 + 2L_-^2 \underbrace{L_+L_- + L_-L_+ - L_+L_- - L_-L_+}_{=0}\Big]|l,m\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\langle l,m|\left(L_+^2|l,m\rangle\right) + \frac{1}{2}\langle l,m|\left(L_-^2|l,m\rangle\right) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*)
Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist gegeben durch:

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma \vec{L} \cdot \vec{B}$$

Dabei ist $\vec{L}$ der Drehimpuls und $\vec{B}$ das angelegte Magnetfeld. Θ (das Trägheitsmoment) und γ (der gyromagnetische Faktor) sind Konstanten. Das Magnetfeld sei konstant in z-Richtung: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
Wie lauten Energieeigenzustände des Systems? Berechne die Energieeigenwerte.

Lösung:
Wir kennen simultane Eigenzustände der Operatoren L^2 und L_z, nämlich die Kugelflächenfunktionen Y_{lm}. Dementsprechend sind selbige die gesuchten Eigenzustände. Die Eigenenergien sind dann gegeben durch:

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\Theta} + \gamma m\hbar B$$

Aufgabe 4 (**)
Wir betrachten ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ mit Eigenwert $2\hbar^2$, d.h. $l = 1$.

a) Bestimmen Sie, ausgehend von der bekannten Wirkung von Auf- und Absteigeroperatoren $L_\pm$, die Matrixdarstellung von L_x, L_y und L_z bezüglich der Standardbasis $|l, m\rangle$.

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, ausgedrückt in Kugelkoordinaten mit θ und φ, für ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ und L_x mit den Quantenzahlen $l = 1$ und $m_x = 1$.

Lösung:

a) Zunächst bemerken wir, dass die Matrixdarstellungen bezüglich des 3-dimensionalen Unterraumes, der durch die Basis $\{|l = 1, m\rangle\}_{m=-1,0,1}$ aufgespannt wird, zu bestimmen sind. Die gegebene Basis besteht aus Eigenzuständen des Operators L_z, d.h.: $L_z |1, m\rangle = \hbar m |1, m\rangle$. Die darstellende Matrix des Operators L_z ist damit diagonal:

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Wirkungen von $L_{x,y}$ auf die Eigenzustände von L_z, also die $|l, m\rangle$, erhalten wir durch Verwendung von $L_\pm$. Dabei ist bekannt, dass gilt:

$$L_+ |1, 1\rangle = 0 \qquad L_- |1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1, 0\rangle$$
$$L_+ |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1, 1\rangle \qquad L_- |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1, -1\rangle$$
$$L_+ |1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1, 0\rangle \qquad L_- |1, -1\rangle = 0$$

wobei wir benutzt haben, dass gilt:

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

Dies liefert uns:

$$L_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad L_- = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Verwendung der Definition von Auf- und Absteiger und Invertierung zu:

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad L_y = \frac{i}{2}(L_+ - L_-)$$

liefert uns die gesuchten Matrixdarstellungen zu:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

b) Diagonalisierung von L_x liefert die Eigenzustände von L_x bezüglich unserer gewählten Basis aus Eigenzuständen von L_z. In Dirac-Notation:

$$\begin{aligned}|1,\pm 1\rangle_x &= \frac{1}{2}(|1,1\rangle \pm \sqrt{2}\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle), \quad \text{mit Eigenwerten } \pm\hbar\\ |1,0\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle), \quad \text{mit Eigenwert } 0\end{aligned}$$

Die gesuchte Eigenfunktion $\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi)$ im Ortsraum ist damit:

$$\begin{aligned}\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2}\left(Y_1^1(\theta,\varphi) + Y_1^{-1}(\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0(\theta,\varphi)\\ &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\cos\theta - i\sin\theta\sin\varphi)\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\theta,\varphi)$ ergibt sich somit zu:

$$\rho(\theta,\varphi) = |\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{3}{8\pi}(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

Aufgabe 5 (*)
Bestimme die Matrixexponentiale für die Matrizen:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^A = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad B^n = \theta^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (-1)^n \mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{e}^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} B^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} B^{2n+1} \\ &= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*)
Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen für maximalen Bahndrehimpuls $l = n-1$ sind von der Form:

$$\Psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) = \frac{u_{n,n-1}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!a_B}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^n e^{-\frac{r}{na_B}}$$

mit $a_B = \frac{\hbar}{m_e \alpha c}$.

a) *Bestimme den Abstand r_{max} an dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$ maximal wird und vergleiche r_{max} mit dem Mittelwert $\langle r \rangle$.*

b) *Berechne die Unschärfe Δr. Wie hängt die relative Abweichung $\frac{\Delta r}{\langle r \rangle}$ von der Hauptquantenzahl n ab? Das Ergebnis verdeutlicht, dass für große n die Vorstellung einer Kreisbahn zulässig ist.*

Hinweis: $\int_0^\infty dx x^q e^{-x} = q!$

Lösung:

a)

$$P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2 = \frac{2}{n(2n)!a_B} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^{2n} \mathrm{e}^{-\frac{2r}{na_B}}$$

Da $P(r)$ positiv ist und im Ursprung und im Unendlichen verschwindet, nimmt es dazwischen sein Maximum an. Wir suchen also Extremstellen von $P(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = 0$$

Es gilt:

$$\partial_x (x^{2n} \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(2n x^{2n-1} - x^{2n}) = 0 \quad \Rightarrow x_{max} = 2n$$

Es handelt sich um ein Maximum da es die einzige Extremstelle im Intervall $]0, \infty[$ ist und mindestens ein Maximum existiert. Damit gilt:

$$r_{max} = \frac{na_B}{2} x_{max} = n^2 a_B$$

Für den Erwartunswert gilt nach der Substitution $x = \frac{2r}{na_B}$:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 \cdot r \left|\frac{u(r)}{r}\right|^2 = \frac{na_B}{2} \frac{1}{(2n)!} \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}x x^{2n+1} \mathrm{e}^{-x}}_{(2n+1)!} = n(n + \frac{1}{2}) a_B > r_{max}$$

b)

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 \cdot r^2 \left| \frac{u(r)}{r} \right|^2 = \left(\frac{n a_B}{2}\right)^2 \frac{1}{(2n)!} \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}x x^{2n+2} \mathrm{e}^{-x}}_{(2n+2)!} = n^2(n+1)(n+\frac{1}{2})a_B^2$$

Damit finden wir:

$$\Delta r = \frac{a_B n}{2}\sqrt{2n+1}$$

und

$$\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Für große n macht die Vorstellung einer Kreisbahn also Sinn.

Aufgabe 7 (*)
Drücke den Winkelanteil des Ortsvektors $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten durch geeignete Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen Y_{lm} aus.

Lösung:
In Kugelkoordinaten haben wir:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cdot \cos\vartheta \end{aligned}$$

Demnach benötigen wir Ausdrücke für die Winkelanteile:

$$\sin\vartheta\cos\varphi \qquad \sin\vartheta\sin\varphi \qquad \cos\vartheta$$

Wir kennen die benötigten Kugelflächenfunktionen und die komplexe Darstellung der trigonometrischen Funktionen:

$$Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \qquad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)$$

und wir finden:

$$\Rightarrow \quad \cos\vartheta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot Y_{10}(\vartheta,\varphi)$$

$$\frac{1}{2}(-Y_{11}(\vartheta,\varphi) + Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \sin\vartheta\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1-1}(\vartheta,\varphi) - Y_{11}(\vartheta,\varphi))$$

$$\frac{1}{2i}(-Y_{11}(\vartheta,\varphi) - Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \sin\vartheta\sin\varphi = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1-1}(\vartheta,\varphi) + Y_{11}(\vartheta,\varphi))$$

Aufgabe 8 (**)

Der Hamiltonoperator des dreidimensionalen harmonischen Oszillators in Kugelkoordinaten lautet:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}\omega^2 r^2$$

a) *Reduziere die stationäre Schrödingergleichung auf eine Radialgleichung mit dem üblichen Ansatz* $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$. *Vereinfache sie durch die Substitution mit den dimensionslosen Größen* $y = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$ *und* $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$.

b) *Zeige, dass das asymptotische Verhalten durch den Ansatz* $u(y) = y^{l+1}e^{-y^2/2}v(y^2)$ *berücksichtigt wird und bestimme die verbleibende Differentialgleichung für* $v(y^2)$.

c) *Schreibe die DGL aus b) um, in eine DGL für* $v(\rho)$ *mit der Variablen* $\rho = y^2$.

d) *Setze eine Potenzreihe für* $v(\rho)$ *an. Die Abbruchbedingung liefert das Energiespektrum* $E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$ *mit den Quantenzahlen* n, l.

Lösung:

a) Die Radialgleichung lautet:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} + \frac{M}{2}\omega^2 r^2 - E\right)u(r) = 0$$

Die Substitution ergibt:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{l(l+1)}{y^2} - y^2 + 2\epsilon\right)u(y) = 0$$

b)

$$y \to 0: \qquad u''(y) = \frac{l(l+1)}{y^2}u(y) \qquad \Rightarrow u(y) = y^{l+1}$$
$$y \to \infty: \qquad u''(y) \approx (y^2-1)u(y) \qquad \Rightarrow u(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Der Ansatz $u(y) = y^{l+1}\mathrm{e}^{-y^2/2}v(y^2)$ berücksichtigt also beides. Einsetzen in die DGL liefert eine Gleichung für v:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{2}{y}(1+l-y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + 2 - 2l - 3\right)v(y^2) = 0 \tag{1}$$

c) Durch Anwenden der Kettenregel können wir die DGL (1) umformen zu:

$$4y^2v''(y^2) + 2v'(y^2) + 4(1+l-y^2)v'(y^2) + 2\left(1 - l - \frac{3}{2}\right)v(y^2) = 0$$

Jetzt substituieren wir $\rho = y^2$, was zu

$$\left[\rho\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \left(l + \frac{3}{2} - \rho\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + \nu\right]v(\rho) = 0$$

führt, wobei wir die Abkürzung $\nu = \frac{1}{2}(\epsilon - l - \frac{3}{2})$ eingeführt haben.

d) Mit dem Potenzreihenansatz $v(\rho) = \sum a_k\rho^k$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-\nu}{(k+1)(k+l+3/2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k} \text{ für große } k$$

Falls die Reihe nie abbricht, verhält sie sich wie die Exponentialreihe. Also:

$$v(\rho) \approx \mathrm{e}^{\rho} \quad \text{bzw.} \quad v(y^2) = \mathrm{e}^{y^2}$$

Das widerspricht der Forderung nach Normierbarkeit von u. Die Reihe muss also bei einem $n = \nu = \frac{1}{2}(\epsilon - l - \frac{3}{2})$ abbrechen!
Resubstitution von $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ und Auflösen der Gleichung nach E ergibt:

$$E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$$

Aufgabe 9 (**)
Wir betrachten den Spin eines Elektrons im magnetischen Feld $\vec{B}$. Der Hamiltonoperator lautet:

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right)\vec{S}\cdot\vec{B}$$

Wir wählen ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist also gegeben durch

$$H = \omega S_z \quad \textit{mit} \quad \omega = \frac{|e|B}{m_e c}.$$

a) *Was sind die Eigenzustände und Energieeigenwerte des Systems?*

b) *Zum Zeitpunktpunkt $t = 0$ befinde sich das System in dem Zustand*

$$|\alpha; t=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

also in dem $|S_x;+\rangle$ Eigenzustand der S_x-Komponente.
Benutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\alpha;t\rangle = H\,|\alpha;t\rangle$$

um $|\alpha;t\rangle$ zu bestimmen.

c) *Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t wieder im Zustand $|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ befindet? Wie groß ist also $|\langle S_x;+|\alpha;t\rangle|^2$?*

Lösung:

a) Da der Hamiltonoperator einfach ein Vielfaches von S_z ist, sind die Eigenzustände gegeben durch $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Die entsprechenden Energieeigenwerte sind $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$.

b) Eigenzustände $|\Psi(t=0)\rangle$ mit Eigenenergie E_Ψ entwickeln sich gemäß der zeitabhängigen Schrödingergleichung:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_\Psi t\right)|\Psi(t=0)\rangle \tag{2}$$

Unser Anfangszustand $|\alpha;t=0\rangle$ ist ein Überlagerungszustand aus zwei Eigenzuständen des Hamiltonoperators. Die Eigenzustände entwickeln sich separat nach (2) (Linearität der Schrödingergleichung!). Also ist:

$$|\alpha;t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + \mathrm{e}^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\right]$$

c)

$$\langle S_x;+|\alpha,t\rangle = \frac{1}{2}\Big[\langle+|+\langle-|\Big]\Big[\mathrm{e}^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle+\mathrm{e}^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\Big] = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{i\omega t}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{i\omega t}{2}}\Big] = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

also ist

$$|\langle S_x;+|\alpha,t\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Aufgabe 10 ***(*)***

Ein Elektron befinde sich im Spinzustand:

$$\chi = A\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix} = A\Big((1-2i)|+\rangle + 2|-\rangle\Big)$$

bezüglich der Eigenzuständen von S_z.

a) Bestimmen Sie die Konstante A so, dass χ korrekt normiert ist.

b) Sie messen S_z bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_z?

c) Sie messen S_x bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_x?

Lösung:

a) Die Normierungsbedingung führt zu:

$$1 \stackrel{!}{=} \bar{\chi}\cdot\chi = |A|^2(1+2i,0)\cdot\begin{pmatrix}1-2i\\0\end{pmatrix} = |A|^2\cdot(1+4+4) \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad \text{(bis auf bel. Phase)}$$

b) Wir arbeiten in der S_z Basis. Die Eigenwerte können daher direkt abgelesen werden zu:

$$P_{+\hbar/2} = |\langle+|\chi\rangle|^2 = \frac{5}{9} \qquad P_{-\hbar/2} = |\langle+|\chi\rangle|^2 = \frac{4}{9}$$

Damit ergibt sich ein Erwartungswert von:

$$\langle S_z\rangle = \langle\chi|S_z|\chi\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right) = \frac{\hbar}{18}$$

c) Der Eigenvektor von S_x zum Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$ in der S_z Basis ist gegeben durch:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$$

was man durch Diagonalisierung von S_x oder durch Einsetzen in die Formel aus der Vorlesung mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$ erhält. Damit erhalten wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu:

$$P_{+\hbar/2,x} = |\langle x,+|\chi\rangle|^2 = \frac{13}{18} \qquad P_{-\hbar/2,x} = |\langle x,-|\chi\rangle|^2 = \frac{5}{18}$$

Dies führt zu einem Erwartungswert von:

$$\langle S_x \rangle = \frac{2\hbar}{9}$$

Aufgabe 11 (**)

Wir koppeln zwei 1/2 Spins und bezeichnen die Eigenzustände zum quadratischen Gesamtspinoperator S^2 mit $|s = 0, 1\ , m\rangle$. Wir definieren Auf- und Absteiger: $S_\pm := S_{1\pm} + S_{2\pm}$.

a) Wenden Sie S_- auf den Triplet-Zustand $|s = 1, m = 0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass das Ergebnis $\sqrt{2}\hbar\,|1, -1\rangle$ folgt.

b) Wenden Sie $S_\pm$ auf den Singlet-Zustand $|s = 0, m = 0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass es keine weiteren Singlett-Zustände gibt.

c) Zeigen Sie, dass $|1, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ Eigenzustände von S^2 mit den erwarteten Eigenwerten sind.

Lösung:

a) Die Wirkung des Auf- und Absteigers bzgl. einer Komponente ist:

$$\begin{aligned} S_\pm\,|\mp\rangle &= \hbar\sqrt{(s(s+1) - m(m\pm 1))}\,|\pm\rangle \\ &= \hbar\sqrt{(1/2(1/2+1) \pm 1/2(\mp 1/2 \pm 1))}\,|\pm\rangle = \hbar\,|\pm\rangle \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_-\,|s=1, m=0\rangle &= (S_{1-} + S_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{S_{1-}\,|+,-\rangle}_{=\hbar|-,-\rangle} + \underbrace{S_{1-}\,|-,+\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-}\,|+,-\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-}\,|-,+\rangle}_{=\hbar|-,-\rangle}) \\ &= \sqrt{2}\hbar\,|-,-\rangle = \sqrt{2}\hbar\,|1,-1\rangle \end{aligned}$$

b) Mit einer analogen Rechnung wie in a) finden wir, dass:

$$\begin{aligned} S_\pm\,|0,0\rangle &= (S_{1\pm} + S_{2\pm})\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1\pm}\,|+,-\rangle - S_{1\pm}\,|-,+\rangle + S_{2\pm}\,|+,-\rangle - S_{2\pm}\,|-,+\rangle) = 0 \end{aligned}$$

wobei wir beobachten, dass sich zwei Paare stets gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben.
Damit können wir durch Anwenden von Auf- und Absteigern keine weiteren Singulet-Zustände erzeugen, so wie es sein sollte.

c) Wir beginnen mit den Hilfsrechnungen bzgl. einer Komponente:

$$S_x \left|+\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left|-\right\rangle \qquad S_x \left|-\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left|+\right\rangle$$

$$S_y \left|+\right\rangle = \frac{i\hbar}{2} \left|-\right\rangle \qquad S_y \left|-\right\rangle = \frac{-i\hbar}{2} \left|+\right\rangle$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
S^2 \left|1,1\right\rangle &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 \left|+,+\right\rangle = \left(S_1^2 + S_2^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})\right) \left|+,+\right\rangle \\
&= 2 \cdot \frac{3\hbar^2}{4} \left|+,+\right\rangle + 2\left(\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\left|-,-\right\rangle + \frac{i\hbar}{2}\frac{i\hbar}{2}\left|-,-\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\left|+,+\right\rangle\right) \\
&= 2\hbar^2 \left|+,+\right\rangle = 1(1+1)\hbar^2 \left|1,1\right\rangle \\
S^2 \left|1,-1\right\rangle &= 2\hbar^2 \left|+,-\right\rangle = 1(1+1)\hbar^2 \left|1,-1\right\rangle
\end{aligned}$$