Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2014

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeißer
Fakultät für Physik
Technische Universität München

11. September 2015

Drehimpuls, Spin und H-Atom

Aufgabe 1 (*)
Beweise die Relationen

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L^2, L_\pm] = 0$$

mithilfe der Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls.

Aufgabe 2 (*)
Wir bezeichnen die simultanen Eigenkets von L^2 und L_z mit $|l,m\rangle$, $l \in \mathbb{N}$ und $-l \leq m \leq +l$. Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt:

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\, |l, m\pm1\rangle$$

Drücke L_x und L_y durch $L_\pm$ aus und zeige die Relationen

$$\langle l,m|L_xL_y + L_yL_x|l,m\rangle = 0$$
$$\langle l,m|L_x^2 - L_y^2|l,m\rangle = 0$$

Aufgabe 3 (*)
Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist gegeben durch:

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma\vec{L}\cdot\vec{B}$$

Dabei ist $\vec{L}$ der Drehimpuls und $\vec{B}$ das angelegte Magnetfeld. Θ (das Trägheitsmoment) und γ (der gyromagnetische Faktor) sind Konstanten. Das Magnetfeld sei konstant in z-Richtung: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
Wie lauten Energieeigenzustände des Systems? Berechne die Energieeigenwerte.

Aufgabe 4 (**)

Wir betrachten ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ mit Eigenwert $2\hbar^2$, d.h. $l = 1$.

a) *Bestimmen Sie, ausgehend von der bekannten Wirkung von Auf- und Absteigeroperatoren $L_\pm$, die Matrixdarstellung von L_x, L_y und L_z bezüglich der Standardbasis $|l, m\rangle$.*

b) *Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, ausgedrückt in Kugelkoordinaten mit θ und φ, für ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ und L_x mit den Quantenzahlen $l = 1$ und $m_x = 1$.*

Aufgabe 5 (*)

Bestimme die Matrixexponentiale für die Matrizen:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (*)

Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen für maximalen Bahndrehimpuls $l = n - 1$ sind von der Form:

$$\Psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) = \frac{u_{n,n-1}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!a_B}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^n e^{-\frac{r}{na_B}}$$

mit $a_B = \frac{\hbar}{m_e \alpha c}$.

a) *Bestimme den Abstand r_{max} an dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$ maximal wird und vergleiche r_{max} mit dem Mittelwert $\langle r \rangle$.*

b) *Berechne die Unschärfe Δr. Wie hängt die relative Abweichung $\frac{\Delta r}{\langle r \rangle}$ von der Hauptquantenzahl n ab? Das Ergebnis verdeutlicht, dass für große n die Vorstellung einer Kreisbahn zulässig ist.*

Hinweis: $\int\limits_0^\infty dx x^q e^{-x} = q!$

Aufgabe 7 (*)

Drücke den Winkelanteil des Ortsvektors $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten durch geeignete Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen Y_{lm} aus.

Aufgabe 8 (**)

Der Hamiltonoperator des dreidimensionalen harmonischen Oszillators in Kugelkoordinaten lautet:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}\omega^2 r^2$$

a) *Reduziere die stationäre Schrödingergleichung auf eine Radialgleichung mit dem üblichen Ansatz* $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. *Vereinfache sie durch die Substitution mit den dimensionslosen Größen* $y = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$ *und* $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$.

b) *Zeige, dass das asymptotische Verhalten durch den Ansatz* $u(y) = y^{l+1} e^{-y^2/2} v(y^2)$ *berücksichtigt wird und bestimme die verbleibende Differentialgleichung für* $v(y^2)$.

c) *Schreibe die DGL aus b) um, in eine DGL für* $v(\rho)$ *mit der Variablen* $\rho = y^2$.

d) *Setze eine Potenzreihe für* $v(\rho)$ *an. Die Abbruchbedingung liefert das Energiespektrum* $E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$ *mit den Quantenzahlen* n, l.

Aufgabe 9 (**)

Wir betrachten den Spin eines Elektrons im magnetischen Feld $\vec{B}$. *Der Hamiltonoperator lautet:*

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right) \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Wir wählen ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist also gegeben durch

$$H = \omega S_z \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{|e|B}{m_e c}.$$

a) *Was sind die Eigenzustände und Energieeigenwerte des Systems?*

b) *Zum Zeitpunktpunkt* $t = 0$ *befinde sich das System in dem Zustand*

$$|\alpha; t = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$$

also in dem $|S_x; +\rangle$ *Eigenzustand der* S_x*-Komponente.*
Benutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha; t\rangle = H |\alpha; t\rangle$$

um $|\alpha; t\rangle$ *zu bestimmen.*

c) *Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt* t *wieder im Zustand* $|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$ *befindet? Wie groß ist also* $|\langle S_x; +|\alpha; t\rangle|^2$*?*

Aufgabe 10 *(*)*

Ein Elektron befinde sich im Spinzustand:

$$\chi = A\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} = A\Big((1-2i)\left|+\right\rangle + 2\left|-\right\rangle\Big)$$

bezüglich der Eigenzuständen von S_z.

a) *Bestimmen Sie die Konstante A so, dass χ korrekt normiert ist.*

b) *Sie messen S_z bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_z?*

c) *Sie messen S_x bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_x?*

Aufgabe 11 **(**)**

Wir koppeln zwei 1/2 Spins und bezeichnen die Eigenzustände zum quadratischen Gesamtspinoperator S^2 mit $|s=0,1\ ,m\rangle$. Wir definieren Auf- und Absteiger: $S_\pm := S_{1\pm} + S_{2\pm}$.

a) *Wenden Sie S_- auf den Triplet-Zustand $|s=1, m=0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass das Ergebnis $\sqrt{2}\hbar\,|1,-1\rangle$ folgt.*

b) *Wenden Sie $S_\pm$ auf den Singlet-Zustand $|s=0, m=0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass es keine weiteren Singlett-Zustände gibt.*

c) *Zeigen Sie, dass $|1,1\rangle$ und $|1,-1\rangle$ Eigenzustände von S^2 mit den erwarteten Eigenwerten sind.*