Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben
Sommersemester 2013

Fabian Jerzembeck und Sebastian Steinbeißer
Fakultät für Physik
Technische Universität München

14. September 2015

Grundlagen und Formalismus

Aufgabe 1 (*)
Betrachte die Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

wobei $A, \lambda, \omega > 0$ *gelte.*

a) *Normiere* Ψ

b) *Was ist der Erwartungswert von* x *und* x^2*?*

c) *Bestimme die Standardabweichung von* x*. Wie sieht der Graph von* $|\Psi|^2$ *als Funktion von* x *aus? Markiere die Punkte* $(\langle x\rangle + \Delta x)$ *und* $(\langle x\rangle - \Delta x)$ *und berechne die Wahrscheinlichkeit das Teilchen außerhalb dieses Bereichs zu finden.*

Aufgabe 2 (*)
Zeige, dass gilt:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [H, x_i] = -\frac{i\hbar}{m}p_i, \quad [H, p_i] = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}V(x)$$

Aufgabe 3 (*)

a) *Zeige, dass gilt:* $[p, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}$.

b) *Zeige mit a), dass für alle* F *gilt:* $[p, F(x)] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}$*, wenn diese als Potenzreihe ausgedrückt werden können.*

Aufgabe 4 (**)

Zeige die Gültigkeit der Heisenberg'schen Unschärferelation, bezogen auf Ort und Impuls, anhand des Gauß'schen Wellenpakets:

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} \exp\{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}\}$$

Aufgabe 5 (**)

Berechnen Sie die Bindungsenergien und normierten Wellenfunktionen für ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m, das von einem eindimensionalen δ-Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \qquad \lambda > 0$$

angezogen wird. Leiten Sie zuerst aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Sprungbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung her:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(-\varepsilon)] = \lambda\Psi(0)$$

Wie viele Bindungszustände mit $E < 0$ gibt es? Berechnen Sie für den Bindungszustand die Orts- und Impulsunschärfen Δx und Δp und überprüfen Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

Hinweis: $\int\limits_0^\infty xx^q \mathrm{e}^{-x} = q!$

Aufgabe 6 (**)

In der Mitte eines unendlichen hohen Potentialtopfs der Breite $2a$ befindet sich eine δ-Barriere $V(x) = \lambda\delta(x)$ mit $\lambda > 0$.

a) Geben Sie die Schrödingergleichung und die Stetigkeitsbedingung für das gegebene Problem an.

b) Betrachten Sie den Ansatz

$$\Psi(x) = A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}$$

jeweils in den Gebieten links und rechts von der Barriere. Stellen Sie die Randbedingungen bei $x = \pm a$ und die Anschlussbedingung bei $x = 0$ auf und bestimmen Sie die Koeffizienten der Wellenfunktion.

c) Leiten Sie die Bedingungen für die möglichen k-Werte ab.

d) Geben Sie die Normierung der Wellenfunktion an.

Aufgabe 7 (*)
Wir haben einen unendlichdimensionalen Hilbertraum mit einem abzählbaren Orthonormalsystem $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...\}$, *d.h.:* $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. *Ein Zustand sei definiert als:*

$$|\Psi_\alpha\rangle \equiv C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

mit einer komplexen Zahl α.
Außerdem definieren wir uns den Absteigeoperator a über:

$$a|n\rangle \equiv \sqrt{n}\,|n-1\rangle \ \forall n \geq 1 \quad \textit{und} \quad a|0\rangle \equiv 0$$

a) *Bestimme* C *so, dass* $|\Psi_\alpha\rangle$ *normiert ist.*

b) *Zeige, dass* $|\Psi_\alpha\rangle$ *ein Eigenzustand von* a *ist und berechne den Eigenwert.*

c) *Sind die Zustände* $|\Psi_\alpha\rangle$ *und* $|\Psi_\beta\rangle$ *für* $\alpha \neq \beta$ *orthogonal?*

Aufgabe 8 (*)
Wir benutzen einen zweidimensionalen komplexen Hilbertraum (d.h.: den $\mathbb{C}^2$*) um ein System mit zwei Zuständen zu beschreiben. Unsere Orthonormalbasis bezeichnen wir mit* $|+\rangle, |-\rangle$. *Außerdem definieren wir uns die Operatoren*

$$S_x \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)$$
$$S_y \equiv \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)$$
$$S_z \equiv \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)$$

a) *Zeige, dass* $|+\rangle$ *und* $|-\rangle$ *Eigenzustände von* S_z *sind.*

b) *Zeige, dass* $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ *gilt.*

c) *Wie lautet die Unschärferelation für die beiden Operatoren* S_x *und* S_y *für ein System im Zustand* $|+\rangle$*?*

Aufgabe 9 (*)
Betrachte einen Hilbertraum, der von den Eigenkets $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, ...$ *von* A *aufgespannt wird. Die entsprechenden Eigenwerte lauten* $a_1, a_2, a_3, ...$
Beweise, dass

$$\prod_n (A - a_n)$$

der Nulloperator ist.

Aufgabe 10 (*)
Eine Observable A besitzt die zwei normierten Eigenzustände ψ_1 und ψ_2, mit den Eigenwerten a_1 und a_2. Die Observable B besitzt die normierten Eigenzustände ϕ_1 und ϕ_2 mit den Eigenwerten b_1 und b_2.
Für die Eigenzustände gilt:

$$\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$$

a) *Observable A wird gemessen und man erhält den Wert a_1. Was ist der Zustand des Systems direkt nach der Messung?*

b) *Im Anschluss wird B gemessen. Was sind die möglichen Ergebnisse und mit welcher Wahrscheinlickeit treten sie auf?*

c) *Direkt nach der Messung von B wird wieder A gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir wieder a_1?*