Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Probeklausur - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

Aufgabe 1 [17 Punkte]

Beantworten Sie die folgenden Fragen zu grundlegenden Begriffen bzw. Sachverhalten der Mechanik durch präzise und vollständige, aber knappe Ausführungen bzw. Ableitungen der Resultate:

1. Erklären Sie die folgenden Begriffe in jeweils einem Satz: [6 Punkte]
   - Längenkontraktion
   - skleronome Zwangsbedingung
   - virtuelle Verrückung
   - Inertialsystem
   - galileisches Relativitätsprinzip
   - kanonische Transformation
2. Nenen Sie die Keplergesetze. [3 Punkte]
3. Geben Sie an, ob die Aussage immer wahr ist. Ein einfaches Ja oder nein genügt. (Richtige Antworten geben zwei Punkte, falsche Antworten einen Punkt Abzug, keine Antwort keine Punkte.) [8 Punkte]
   - Gegeben Sei ein Teilchen der (konstanten) Masse m im konservativen Kraftfeld $\vec{F}$. $\vec{F}$ lässt sich allgemein schreiben als Gradient eines zeitabhängigen Potentials $\vec{F}(\vec{r}, t) = -gradU(\vec{r}, t)$.
   - Gegeben Sei ein abgeschlossenes System, bestehend aus n Punktteilchen mit Massen $m_1, ..., m_n$, das durch ein explizit zeitabhängiges Potential $U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t)$ beschrieben wird. Ist das Potential invariant unter Drehungen, so ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ erhalten.
   - Betrachten Sie System aus n Massenpunkten. m holonome Zwangsbedingungen sei durch m unabhängige Gleichungen der Form $g_i(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t) = 0$ (für i ∈ {1, ..., m}) Das System wird durch $n - m$ verallgemeinerte Koordinaten beschrieben.
   - Betrachten Sie die Bewegung eines starren Körpers, dessen Trägheitstensor I bezüglich eines im Schwerpunkt des starren Körpers fest verankerten Koordinatensystems gegeben sei. Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der Schwerpunktstranslation und der Energie der Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt.

Lösung:

1. Begrifferkläungen:
   - Sie besagt, dass ein bewegter Beobachter eine kürzere Distanz zwischen zwei Punkten im Raum misst als ein ruhender.
   - Zwangsbedingung die explizit von der Zeit abhängt.
   - Infinitesimale Änderung der Lagen $\delta x_i,\ i = 1, ..., n$ bei fester Zeit t welche mit Zwangsbedingungen verträglich ist.

- Bezugssystem (und Zeitkoodrinate t) in denen ein kräftefreier Massepunkt durch $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = const.$ $[\ddot{\vec{r}} = 0]$ beschrieben wird.
- Die Naturgesetze sind forminvariant gegenüber Galileitransformationen, d. h. sie nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an.
- Ist eine Transformation $Q_K = Q_K(p, q, t)$ der Phasenraumkoordinaten die die Form der Hamiltongleichungen unverändert lässt.

2. Keplersche Gesetze:

   - Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
   - Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
   - Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnhalbachsen.

3. Aussagen:

   - Falsch. Per Definition lässt sich ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}$ schreiben als GRadient eines zeitunabhängigen Potentials $\vec{F}(\vec{r}) = -grad U(\vec{r})$.
   - Wahr.
   - Falsch. Insgesamt handelt es sich um $3n$ Lagrange-Gleichungen 1. Art für die $3n+m$ Unbekannten. Zusammen mit den m Zwangsbedinnngung$_i = 0$ erhält man in $3n+m$ Gleichungen für $3n+m$ Unbekannte. Andererseits sind von den $3n$ Freiheitsgraden des Systems m durch Zwangsbedingungen $g_i = 0$ eingeschränkt, sodass nur $3n - m$ Freiheitsgrade übrigbleiben, die durch $3n-m$ generalisierte Koordinaten beschrieben werden können.
   - Wahr.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens der Masse m an einer harten, undurchdringbaren (dreidimensionalen) Kugel mit Radius R, die sich im Ursprung des Koordiantensystems befindet. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Teilchen aus dem Unendlichen mit Energie E und Stoßparameter b (bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel) einläuft:

1. Geben Sie dsa Potential $U = U(r)$ sowie das effektive Potential $V = V(r)$ für das Problem an und skizzieren Sie beide. [1 Punkt]
2. Welche physikalischen Situationen entsprechen den Fällen $E > \frac{l^2}{2mR^2}$ und $0 < E < \frac{2}{2mR^2}$, wobei l der Betrag des Drehimpulses des Systems ist? Geben Sie für beide Fälle den Umkehrpunkt r_0 als Funktion der Energie E und des Stoßparameters b an. [2 Punkte]
3. Berechnen Sie für beide Fälle den Streuwinkel ϑ des Teilchens und erläutern Sie Ihr Ergebnis geometrisch. [4 Punkte]
4. Bestimmen Sie für den Fall, dass das Teilchen auf die Kugel stößt, sowohl differntiellen als auch totalen Wirkungsquerschnitt. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse! [3 Punkte]

Lösung:

1. Da es sich bei der Kugel mit Radius R um eine undurchdringbare Barriere handelt, lautet das Potential:

   Für $r > R$:

$$U(r) = 0 \tag{1}$$

   Für $r < R$:

$$U(r) = +\infty \tag{2}$$

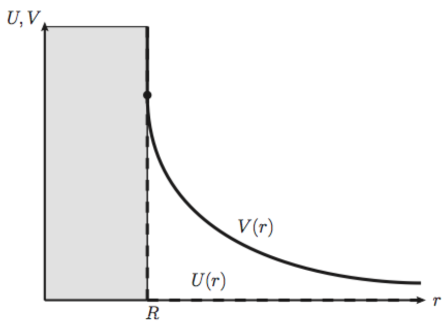
   Das effektive Potential $V = V(r)$ berücksichtigt noch den Beitrag $\frac{l^2}{2mr^2}$ des erhaltenen Drehimpulses l, also:

   Für $r > R$:

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} \tag{3}$$

   Für $r < R$:

$$V(r) = +\infty \tag{4}$$



   Beide Potentiale sind in obenstehender Figur gezeichnet. Die Gesamtenergie des Systems ist:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) \tag{5}$$

2. Wir wenden uns nun dem Streuproblem zu. Offenbar gilt $E > 0$. Wegen $V(r) = \frac{l^2}{2mr^2}$ für $r > R$ hat das Teilchen im Unendlichen nur kinetische Energie, also:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \tag{6}$$

   wobei v_∞ die Geschwindigkeit im Unendlichen ist. Da der Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ im Zentralpotential erhalten ist, gilt für seinen Betrag $l = |\vec{L}| = mrvsin\varphi = mrsin\varphi v = mbv_\infty$, wobei φ der von $\vec{r}$ un der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ist. Setzt man dies in den Ausdruck für die Energie ein, so ist:

$$E = \frac{l^2}{2mb^2} \tag{7}$$

Das heißt, der Fall (i) $E > \frac{l^2}{2mR^2}$ ergibt für den Stoßparameter b die Bedingung $b < R$, der Fall (ii) $0 < E < \frac{l^2}{2mR^2}$ entsprechend $b > R$. Der erste Fall beschreibt demnach den Stoß an der Kugel, der zweite Fall die Streuung an der Kugel (ohne Zusammenprall mit der Kugel).
Im Fall (i) ist der Umkehrpunkt $r_0 = R$, wie man an der obigen Zeichnung sofort erkennt. Denn für $r > R$ ist $E > V(r)$, für $r < R$ ist $E < V(r) = +\infty$. Dies ist die Konsequenz aus der Undurchdringbarkeit der harten Kugel. Für den Fall des Stoßes an der harten Kugel ist demnach der Umkehrpunkt unabhängig von E und b.
Im Fall (ii) erhält man r_0 aus der Bedingung $\dot{r} = 0$, also mit $l^2 = 2mEb^2$ $(U(r) = 0 für r > R)$:

$$r_0 = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}} = b \tag{8}$$

Bewegt sich das Teilchen an der Kugel vorbei, dann entspricht der Umkehrpunkt gerade dem Stoßparameter b.

3. Der Streuwinkel ϑ ist gegeben durch $\vartheta = \pi - 2\alpha$ wobei α der Winkel ist, den das aus dem Unendlichen kommende Teilchen bis zum Umkehrpunkt r_0 durchläuft. Mit:

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(r)} \tag{9}$$

(das Minuszeichen rührt daher, dass das Teilchen aus $r \longrightarrow \infty$ kommt und r entsprechend mit der Zeit abnimmt) und Drehimpulserhaltung $l = mr^2\dot{\varphi} = const.$ ergibt sich :

$$\alpha = \int_0^\alpha d\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}dr = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_\infty^{r_0} \frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}}}dr \tag{10}$$

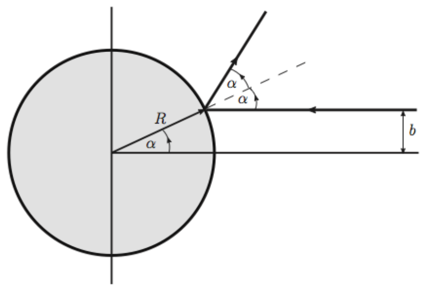
Für den Fall (i) des Stoßes an der Kugel ist:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_\infty^{R} \frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mEr^2}}}dr = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_0^{\frac{1}{R}} \frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mE}x^2}}dr = arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \tag{11}$$

wobei $r = \frac{1}{x}$ und $dr = -\frac{1}{x^2}dx$ gilt.
Man beachte, dass bei $b < R$ tatsächlich $\frac{l^2}{2mER^2} < 1$ gilt. Der Streuwinkel ist dann:

$$\vartheta = \pi - 2\alpha = \pi - 2arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \tag{12}$$

Um dieses Ergebnis geometrisch zu erklären, schreiben wir $sin\alpha = \frac{b}{R}$. Wie man aus folgender Zeichnung abliest, entspricht dies gerade dem Reflexionsgesetz an einer Kugeloberfläche: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.



Für den Fall (ii), in dem das Teilchen die Kugel nicht berührt, ergibt sich mit $r_0 = b$:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_{\infty}^{b}\frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mEr^2}}}dr = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_{0}^{\frac{1}{b}}\frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mE}x^2}}dr = arcsin1 = \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

wobei $r = \frac{1}{x}$ und $dr = -\frac{1}{x^2}dx$ gilt.
und damit der Streuwinkel:

$$\vartheta = \pi - 2\alpha = 0 \tag{14}$$

Wie erwartet wird das Teilchen von der Kugel dann gar nicht abgelenkt.

4. Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für den Fall (i) des Stoßes an der harten Kugel zu berechnen, verwenden wir folgende Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| \tag{15}$$

Gleichung (12) aufgelöst nach b ergibt:

$$b(\vartheta) = Rsin\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right) = Rcos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{16}$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{R}{2sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\frac{R}{2}sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{17}$$

wobei wir die Doppelwinkelformel $sin(2x) = 2sinxcosx$ verwendet haben.
Daraus ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt:

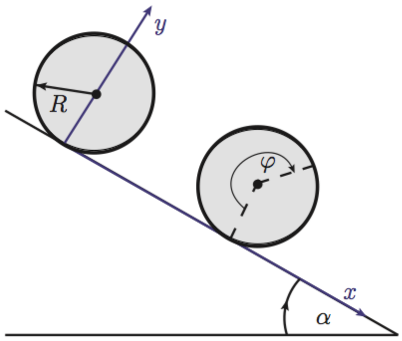
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi \frac{R^2}{4} = R^2\pi \tag{18}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt entspricht der Querschnittsfläche der Kugel, also derjenigen Fläche, die das Teilchen sieht, wenn es sich aus großer Entfernung auf die Kugel zubewegt.

Bemerkung: Den totalen Wirkungsquerschnitt für den Stoß erhät man auch wegen $b_{max} = R$ aus $d\sigma = 2\pi b db \Rightarrow \sigma = \pi b_{max}^2 = R^2\pi$.

Aufgabe 3 [15 Punkte]

Eine homogene Kugel und ein homogener Zylinder mit gleicher Masse M und gleichem Radius R rollen ohne zu gleiten im homogenen Schwerefeld der Erde ($g > 0$) eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinab. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_K und I_Z von Kugel bwz. Zylinder bezüglich der Rotationsachse der Rollbewegung (d. h. für die Kugel bezüglich der Rotation um einen Durchmesser und für den Zylinder bezüglich einer Rotation um seine Längsachse). Zeigen Sie, dass mit homogenen Massenverteilungen gilt: [6 Punkte]

$$I_K = \frac{2}{5}MR^2 \qquad \text{und} \qquad I_Z = \frac{1}{2}MR^2 \tag{19}$$

2. Stellen Sie für beide Körper die jeweilige Lagrangefunktion in der generalisierten Koordiante φ auf. [6 Punkte]

3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. Welcher Körper ist schenller unten, wenn beide vom gleichen Ort aus der Ruhe losgelassen werden? [3 Punkte]

Lösung:

1. In dem angegebenen Koordinatensystem sind die Trägheitsmomente bezüglich einer Achse parallel zur z - Achse (aus Zeichenebene heraus) durch den Schwerpunkt gesucht. Für

den Vollzylinder ergibt sich bei einer Gesamtmasse $M_Z = \rho_Z R^2 \pi h$ (mit der homogenen Dichte ρ_Z und der Höhe h des Zylinders) unter Verwendung von Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} I_Z &= \rho_z \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R [x(\rho,\varphi,z)^2 + y(\rho,\varphi,z)^2]\rho d\rho d\varphi dz = \rho_Z 2\pi h \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{2}R^2 \rho_Z R^2 \pi h = \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Die Masse der Vollkugel ist $M_K = \rho_K \frac{4\pi}{3} R^3$, wobei ρ_K die homogene Dichte angibt. In Kugelkoordinaten ergibit sich:

$$\begin{aligned} I_K &= \rho_K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R [x(r,\vartheta,\varphi)^2 + y(r,\vartheta,\varphi)^2] r^2 sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= \rho_K 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^R r^4 sin^3\vartheta dr d\vartheta = \rho_K 2\pi \frac{4}{3}\frac{1}{5}R^4 = \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned} \tag{21}$$

2. Um die Lagrangefunktion für die beiden Systeme herzuleiten, bemerken wir zunächst, dass sich die kinetische Energie T jeweils zusammensetzt aus der kinetischen Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts und der Energie für Rotationen um den Schwerpunkt S. Wir beschreiben zunächst die Bewegung des Schwerpunkts. Nachdem sowohl Kugel als auch Zylinder ohne zu gleiten die schiefe Ebene nach unten rollen, gilt in dem angebebenen Koordinatensystem die Rollbedingung:

$$x_S = R\varphi \tag{22}$$

Diese Beziehung drückt gerade aus, dass der abgerollte Mantel der zurückgelegten Strecke auf der Ebene entspricht. Offenbar gilt weiter $y_S = R = const.$. Damit bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Nachdem sich alle Punkte der Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit um parallele Achsen bewegen, ist:

$$\omega = \frac{|\vec{V}|}{R} = \dot{\varphi} \tag{24}$$

Hier haben wir die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der sogenannten momentanen Drehachse berechnet. Dabei handelt es sich um die Achse, um die der starre Körper in einem festen Zeitpunkt eine reine Rotation ausführt. In dem vorliegenden Beispiel ist dies gerade die Berührungsachse von Körper und schiefer Ebene.

Bemerkung: Die Wahl der Berührungsache als momentane Drehachse ist äquivalent zur Rollbedingung; diese Wahl stellt sicher, dass der Körper in der Tat rollt und nicht rutscht (reine Abrollen um die Berührungsachse). Würde man eine ander Achse als momentane Drehachse wählen, so würde der Körper auf der schiefen Ebene zusätzlich rutschen. Das kann man sich anhand von zwei Extremfällen klarmachen: Ist die momentane Drehachse im Unendlichen, so entspricht dies dem Fall des Rutschens ohne zu rollen. Verläuft die momentane Drehachse durch das Zentrum des Körpers, so handelt es sich um eine reine Rotation, ohne Bewegung des Schwerpunkts, gleich einem durchdrehenden Reifen. Die Wahl der Berührungsachse als momentane Drehachse ist also in der Tat äquivalent zur Rollbedingung.

Mit der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung ($M_K = M_Z = M, R_K = R_Z = R$):

$$T_{trans} = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 \tag{25}$$

und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt:

$$T_{rot,i} = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}I_i dot\varphi^2 \tag{26}$$

($i \in \{K, Z\}$), lautet die kinetische Energie für Kugel bzw. Zylinder:

$$T_K = T_{trans} + T_{rot,K} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_K\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10}MR^2\dot{\varphi}^2 \tag{27}$$

$$T_Z = T_{trans} + T_{rot,Z} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_Z\dot{\varphi}^2 = \frac{|}{3}4MR^2\dot{\varphi}^2 \tag{28}$$

Wir legen den Nullpunkt der potentiellen Energie in $(0, R)$ des angegebenen Koordinatensystems. Dann ist die Lageenergie für beide Körper jeweils gegeben durch:

$$U = -Mgx_S\,sin\alpha = -MgR\varphi sin\alpha \tag{29}$$

Die Lagrangefunktion füt Kugel bzw. Zylinder ist damit:

$$L_K = T_K - U = \frac{7}{10}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\varphi sin\alpha \tag{30}$$

$$L_Z = T_Z - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\varphi sin\alpha \tag{31}$$

3. Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben für die Kugel:

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7}\frac{gsin\alpha}{R} \tag{32}$$

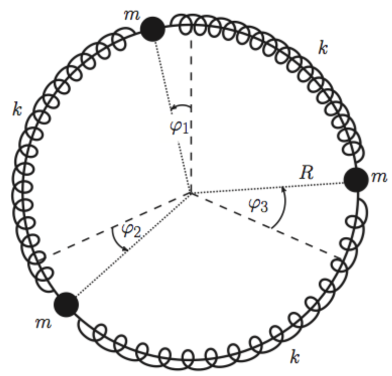
und für den Zylinder:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}\frac{gsin\alpha}{R} \tag{33}$$

Offenbar ist die (konstante) Beschleunigung für die Kugel, $a_K = R\ddot{\varphi} = \frac{15}{21}gsin\alpha$, größer als die Beschleunigung für den Zylinder, $a_Z = R\ddot{\varphi} = \frac{14}{21}gsin\alpha$, sodass die Kugel schneller unten ankommen wird als der Zylinder.

Aufgabe 4 [15 Punkte]

Drei Massenpunkte mit identischen Massen m bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreisring mit Radius R. Sie sind durch drei identische, ideale Federn mit Federkonstanten k entlang der Kreisbögen miteinander verbunden. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten $\varphi_i (i \in \{1,2,3\})$ auf, die als Auslenkun aus einer durch gleiche Federspannung bestimmte Lage definiert sind. [4 Punkte]
2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems, indem Sie das zugehörige Eigenwertproblem lösen. [6 Punkte]
3. Zeigen Sie, dass die Koordinate $\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$ zyklisch ist. Wie groß ist ihre Eigenfrequenz? Bestimmen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße, ihre physikalische Bedeutung und die zugrundeliegende Symmetrie. [3 Punkte]
4. Geben Sie die vollständige Lösung des Schwinungsproblems an. [2 Punkte]

Lösung:

1. Nachdem die Winkel $\varphi_i (i \in \{1,2,3\})$ so gewählt sind, dass sie die Auslenkungen der Federn aus deren jeweiliger Gleichgewichtslage angeben, sind die entsprechenden Auslenkungen gegeben durch $s_i = R\varphi_i$. Dann ist die kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) \tag{34}$$

und die potentielle Energie:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2] = \\ &= \frac{1}{2}kR^2[2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 2\varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3 - 2\varphi_3\varphi_1] \end{aligned} \tag{35}$$

Die Lagrangefunktion ist damit:

$$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - kR^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_3\varphi_1) \tag{36}$$

2. Bevor wir die Eigenfrequenzen und -schwingungen bestimmen, schreiben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen auf:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = mR^2\ddot{\varphi}_1 + kR^2(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) = 0 \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = mR^2\ddot{\varphi}_2 + kR^2(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \tag{38}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = mR^2\ddot{\varphi}_3 + kR^2(-\varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_3) = 0 \tag{39}$$

In Matrixschreibweise mit der Abkürzung $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ kann man schreiben:

$$\ddot{\vec{\varphi}} = -\frac{k}{m}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A}\vec{\varphi} \tag{40}$$

Um nun die Eigenwerte und -schwingungen zu berechnen, diagonalisieren wir zunächst die symmetrische Matrix A; deren Eigenwerte λ sind gegeben durch:

$$0 = det[A - \lambda \cdot 1] = (2-\lambda)^3 - 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2 \tag{41}$$

also $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Nachdem die Matrix symmetrisch ist, also $A = A^T$, wissen wir bereits, dass A diagonalisierbar ist, und damit der Eigenraum $E(\lambda = 3)$ zweidimensional ist. Für die Eigenräume erhalten wir:

$$E(\lambda = 0) = \text{Kern}[A - 0 \cdot 1] = \text{Kern}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{42}$$

$$E(\lambda = 3) = \text{Kern}[A - 3 \cdot 1] = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{43}$$

Mit der Matrix:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \implies S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/3 & -2\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/3 & -2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \tag{44}$$

erhalten wir die Diagonalmatrix:

$$D = SAS^{-1} = \mathrm{diag}(0,3,3) \tag{45}$$

Damit können wir nun in Gleichung (40) Normalkoordinaten $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T = S\vec{\varphi}$ einführen und erhalten:

$$\ddot{\vec{\varphi}} = -\frac{k}{m} S^{-1} D S \vec{\varphi} \iff \ddot{\vec{\Phi}} = -\frac{k}{m} D \vec{\Phi} \tag{46}$$

Da D diagonal ist, haben wir das Gleichungssystem mittels Einführung der Normalkoordinaten $\vec{\Phi}$ entkoppelt:

$$\ddot{\Phi}_1 = 0 \tag{47}$$

$$\ddot{\Phi}_2 = -\frac{3k}{m}\Phi_2 \tag{48}$$

$$\ddot{\Phi}_3 = -\frac{3k}{m}\Phi_3 \tag{49}$$

Damit sind die beiden Eigenfrequenzen gegeben durch:

$$\omega_1 = 0 \tag{50}$$

$$\omega = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{51}$$

die Eigenmoden haben wir bereits in Gleichung (42) und (43) berechnet: Diese entsprechen den Bewegungen $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ $(\omega_1 = 0)$, $\rightarrow\leftarrow\circ(\omega_2)$ und $\rightarrow\circ\leftarrow$ (ω_3).

3. Aus $\vec{\Phi} = S\vec{\varphi}$ können wir zunächst die Normalkoordinaten explizit angeben. Offenbar ist $\vec{\Phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$. Die Invertierung ergibt $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_2 + \Phi_3)$, $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2$, $\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_3$. Wir zeigen nun, dass Φ_1 eine zyklische Koordinate ist. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \Phi_1} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \Phi_1} = \\ &= -\frac{kR^2}{\sqrt{3}}[(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) + (2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)] = \\ &= 0\end{aligned} \tag{52}$$

also ist Φ_1 zyklisch.

Bemerkung: Da die Lagrangefunktion L allgemein eine Funktion der (verallgemeinerten) Ortskoordinaten, hier φ_i, und der (verallgemeinerten) Geschwindigkeiten, hier $\dot{\varphi}_i$, ist, müssten gemäß Kettenregel strenggenommen noch Terme $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \Phi_1}$ berücksichtigt werden. Die Ableitungen $\frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \Phi_1}$ sind aber in jedem Fall null, da wegen $\vec{\Phi} = S\vec{\varphi}$ und daraus $\dot{\vec{\Phi}} = S\dot{\vec{\varphi}}$ Geschwindigkeiten und Orte nicht mischen.

Nach Summation der Bewegungsgleichungen (37, 38, 39) folgt dann:

$$\frac{d}{dt}\left[mR^2\frac{1}{\sqrt{3}}(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_3)\right]=0 \tag{53}$$

die dazugehörige Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls $L = mR^2(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_3)$ des gesamten Systems. Nachdem sich die Massen in einer Ebene auf dem Kreis bewegen, stehen Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor immer senkrecht aufeinander, sodass in der Tat gilt:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{3} m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_i = mR^2(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_3)\vec{e}_z \tag{54}$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Eigenmode der Normalschwingung Φ_1 verschwindende Eigenfrequenz $\omega_1 = 0$ besitzt. Das ist gerade Ausdruck für eine gleichförmige Rotation aller Massen in diesselbe Richtung (Eigenschwingung $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$). Dies folgt, im Übrigen, auch aus der Lösung der Bewegungsgleichung (47, 48, 49,) für die Normalkoordinate Φ_1, nämlich $\Phi_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 t$. Offenbar schwingt bei dieser Bewegung nichts.

4. Um die vollständige Schwingungslösung anzugeben, brauchen wir also nur die Normalmoden Φ_2 und Φ_3 zu berücksichtigen. Die Bewegungsgleichungen (47, 48, 49,) können sofort aufintegriert werden:

$$\Phi_1(t) = \alpha_i cos(\omega t) + \beta_i sin(\omega t) \quad i \in \{2,3\} \tag{55}$$

Die Auslenkungen $\vec{\varphi}$ sind dann (bei Vernachlässigung der Translation):

$$\vec{\varphi}(t) = S^{-1}(t)\vec{\Phi}(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}[\tilde{\alpha_2}cos(\omega t)+\tilde{\beta_2}sin(\omega t)] + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}[\tilde{\alpha_3}cos(\omega t)+\tilde{\beta_3}sin(\omega t)] \tag{56}$$

wobei die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in die Koeffizienten $\tilde{\alpha_i}, \tilde{\beta_i}$ definiert wurden.