Ferienkurs

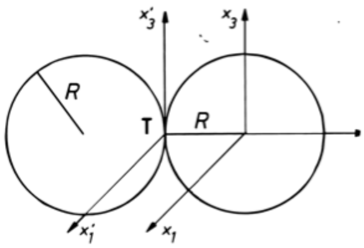
Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 4 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Zwei Kugeln und der Satz von Steiner

Nehmen Sie zwei Kugeln mit identischem Radius R und gleicher homogener Dichteverteilung ρ, welchem am Punkt T zusammengeklebt sind. Berechnen Sie den gesamten Trägheitstensor relativ zum Schwerpunkt der beiden Kugeln am Punkt T.



Lösung:

Der Trägheitstensor einer einzelnen Kugel relativ zu ihrem Schwerpunkt ist aufgrund der Kugelsymmetrie:

$$\Theta_{ik} = I_0 \delta_{ik} \tag{1}$$

mit dem Trägheitsmoment:

$$I_0 = \frac{2}{5} M R^2 \tag{2}$$

Dabei ist M die Masse einer einzelnen Kugel. Nun benutzen wir den Satz von Steiner um den Trägheitstensor einer einzelnen Kugel relativ zum Punkt T zu berechnen. T ist um den Vektor $\vec{R} = (0, R, 0)$ entlang der x_2 - Achse verschoben.

$$\Theta'_{11} = \Theta'_{33} = I_0 + M(R^2 \delta_{ik} - R_1 R_1) = I_0 + MR^2 \tag{3}$$

$$\Theta'_{22} = I_0 M(R^2 \delta_{ik} - R_2 R_2) = I_0 \tag{4}$$

Alle nicht-diagonalen Elemente verschwinden. Für das Gesamtsystem addieren wir nur noch die beiden Tensoren.

2 Rollender Zylinder in Zylinder

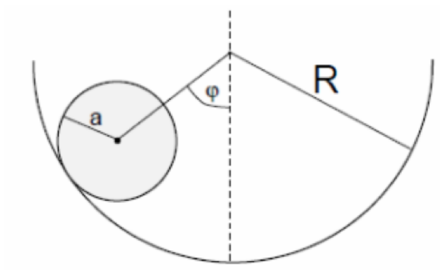
Ein homogener Zylinder (Gesamtmasse M, Radius a, Trägheitsmoment bezüglich seiner Symmetrieachse $\Theta_{zz} = \frac{Ma^2}{2}$) rollt ohne Schlupf unter dem Einfluss der Gravitation auf der Innenseite eines festen Zylinders. Der innere Radius dieses festen Zylinders ist R.

1. Beweisen Sie, dass die folgende Rollbedingung für die Winkelgeschwindigkeit des rollenden Zylinders gilt:

$$\omega_z = \dot{\varphi}\frac{R-a}{a} \tag{5}$$

   Dabei ist φ der Winkel zwischen der festen vertikalen Achse und der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Zylinder.

2. Benutzen Sie die Rollbedingung, um die kinetische Energie des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Geben Sie die Lagrangefunktion des Zylinders an.
   Hilfe: Bestimmen Sie zuerst die Bahngeschwindigkeit v_S des Schwerpunkts des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$. Überlegen Sie dann mittels der Rollbedingung den Zusammenhang zwischen v_S und der Winkelgeschwindigkeit ω_z der Drehung des rollenden Zylinders um seinen Schwerpunkt. Beachten Sie, dass die gesamte kinetische Energie die Summe aus Schwerpunkts- und Rotationsbewegung um den Schwerpunkt ist.



Lösung:

1. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit beträgt $v_S = \dot{\varphi}(R-a)$. Betrachten wir die Bewegung vom Schwerpunkt um die Achse, die durch den Auflagepunkt verläuft und senkrecht auf der Ebene steht. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist durch folgende Relation gegeben:

$$v_S = \omega \cdot a \tag{6}$$

   Da die beiden Schwerpunktsgeschwindigkeiten offensichtlich gleich sein müssen, ergibt sich die Rollbedingung:

$$\omega = \dot{\varphi}\frac{R-a}{a} \tag{7}$$

2. Die Winkelgeschwindigkeit ω_z ergibt sich aus der Rollbedingung:

$$\omega_z = \dot{\varphi}\frac{R-a}{a} \tag{8}$$

   Kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung:

$$T_S = \frac{1}{2}Mv_s^2 \tag{9}$$

Kinetische Energie der Rotationsbewegung:

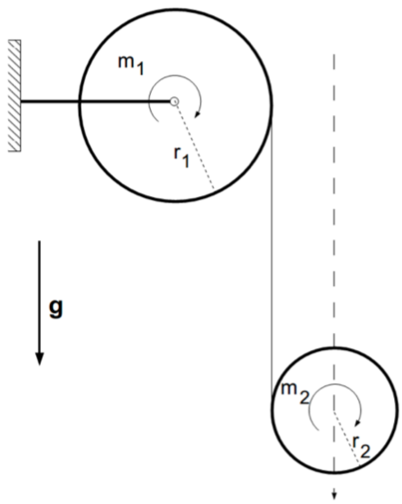
$$T_{Rotation} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega_z^2 \tag{10}$$

$$T = T_S + T_{Rotation} = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega_z^2 \tag{11}$$

$$T = \frac{M}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}a^2\dot{\varphi}^2\frac{(R-a)^2}{a^2} = \frac{3M}{4}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 \tag{12}$$

3 Verspulte Scheibchen

Zwei homogene Scheiben der Massen m_1, m_2 und Radien r_1, r_2 sind von einem masselosen Faden umwickelt. Scheibe 1 kann um ihre Symmetrieachse rotieren und ist ansonsten fixiert. Während Scheibe 2 herunter fällt, wickelt sich der Faden ab. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und die Kraft, welche entlang dem Faden wirkt. Überlegen Sie sich vorher, wie beim Abrollen die Winkel φ_1 und φ_2 - welche die Rotation der Scheiben beschreiben - mit der Position x_2 von m_2 zusammenhängen.



Lösung:

Bewegungsgleichungen - Drehmoment:

Scheibe 1:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1}{2}r_1^2\ddot{\varphi}_1 = r_1 F \tag{13}$$

Scheibe 2:

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_2}{2}r_2^2\ddot{\varphi}_2 = r_2 F \tag{14}$$

Bewegungsgleichung - Kraft auf Massenschwerpunkt x_2 :

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - F \tag{15}$$

Zwangsbedingung:

$$x_2 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 \rightarrow \ddot{x}_2 = r_1\ddot{\varphi}_1 + r_2\ddot{\varphi}_2 \tag{16}$$

$$\longrightarrow m_2(r_1\ddot{\varphi}_1 + r_2\ddot{\varphi}_2) = m_s g - F \tag{17}$$

$$\longrightarrow \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 \frac{m_1}{m_2}\frac{r_1}{r_2} \tag{18}$$

$$(m_2 r_1\ddot{\varphi}_1 + m_1 r_1\ddot{\varphi}_1) = m_2 g - F \tag{19}$$

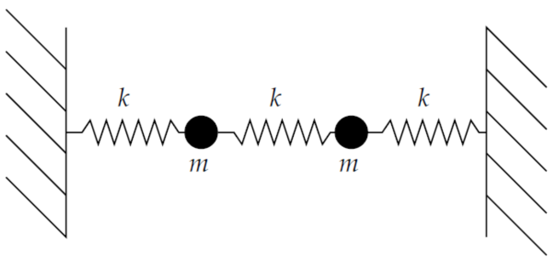
$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2F}{m_1 r_1} \tag{20}$$

$$2F\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = m_2 g - F \qquad \longrightarrow \qquad 2F\left(\frac{2m_2 + 3m_1}{2m_1}\right) = g m_2 \tag{21}$$

$$F = g\frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} \tag{22}$$

4 Gekoppelte Oszillatoren

Zwei Teilchen der Masse m sind über drei identische Federn mit Federkonstanten $k = m\omega_0^2$ miteinander und mit den Wänden verbunden. Die Bewegung der Teilchen ist auf die Achse eingeschränkt (longitudinale Schwingung). Die Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage wird mit x_1 und x_2 bezeichnet.



1. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen im Falle kleiner Auslenkungen lauten:

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \tag{23}$$

2. Durch die Einführung des Auslenkvektors $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ erhält man die Bewegungsgleichungen in Matrixform:

$$\ddot{\vec{x}} + \hat{A}\vec{x} = 0 \tag{24}$$

mit $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$. Durch den Ansatz:

$$\vec{x} = acos(\omega t + \alpha)\vec{u} \tag{25}$$

reduziert sich das Problem auf das Eigenwertproblem:

$$\hat{A}\vec{u} = \omega^2\vec{u} \tag{26}$$

i) Bestimmen Sie die zwei Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Gleichung (26) nichttriviale Lösungen $\vec{u} \neq \vec{0}$ hat.

ii) Finden Sie dazugehörige, normierte Eigenvektoren $\vec{u}^{(1)}$ und $\vec{u}^{(2)}$.

iii) Diskutieren Sie die Art der kollektiven Bewegung der Teilchen, falls die Mode ω_1 bzw. ω_2 angeregt ist.

Hinweis: Die Gleichung (26) hat nicht-triviale Lösungen bei $\omega = \omega_l$, wenn ω_l die Lösung der Gleichung:

$$det(\hat{A} - \omega_l^2 \hat{\mathbb{1}}) = 0 \tag{27}$$

ist. Die Eigenvektoren erhält man dann aus der Gleichung:

$$\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2\vec{u}^{(l)} \tag{28}$$

3. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet:

$$\vec{x} = a_1 cos(\omega_1 t + \alpha_1)\vec{u}^{(1)} + a_2 cos(\omega_2 t + \alpha_2)\vec{u}^{(2)} \tag{29}$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\vec{x}(0) = \vec{0} \qquad \dot{\vec{x}}(0) = (v_1^{(0)}, 0)^T \tag{30}$$

und skizzieren Sie $x_2(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren.

Lösung

1. Nach dem Hookeschen Gesetz üben die Federn auf die beiden Teilchen die Kräfte (F_i bezeichnet die Gesamtkraft auf das i-te Teilchen) aus:

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned} \tag{31}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem newtonschen Axiom $F_i = ma_i$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned} \tag{32}$$

Die Ersetzung $k = m\omega_0^2$ und Neuordnung der Terme liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \\ 0 &= \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned} \tag{33}$$

2. Mit $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ und $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die gegebene Matrixform:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} = +\hat{A}\vec{x} &= \vec{0} \\ -\alpha\omega^2 cos(\omega t + \alpha)\vec{u} + acos(\omega t + \alpha)\hat{A}\vec{u} &= \vec{0} \\ -\omega^2 \vec{\mathbb{1}}\vec{u} + \hat{A}\vec{u} &= \vec{0} \\ (\hat{A} - \omega^2 \vec{\mathbb{1}})\vec{u} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{34}$$

wobei wir den Ansatz $\vec{x} = acos(\omega t + \alpha)\vec{u}$ eingesetzt haben.

i) Ein lineares Gleichungssystem (34) hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$\begin{aligned} det(\hat{A} - \omega\vec{\mathbb{1}}) &= 0 \\ (2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega_0^2)^2 &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Damit ist gezeigt, dass nichttriviale Lösungen existieren, falls:

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \omega_0^2 \qquad \omega^2 = \omega_2^2 = 3\omega_0^2 \tag{36}$$

ii) Zur Bestimmung des jeweils zugehörigen Eigenvektors verwenden wir die definierende Eigenschaft:

$$\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2 \vec{u}^{(l)} \tag{37}$$

Da Vielfache eines Eigenvektors stets auch Eigenvektoren sind, muss dieses Gleichungssystem überbestimmt sein. Es genügt daher, die erste Komponente zu lösen und schließlich eine geeignete Normierung zu wählen:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 : \qquad & 2\omega_0^2 u_1^{(1)} - \omega_0^2 u_2^{(1)} = \omega_0^2 u_1^{(1)} \\
& u_1^{(1)} = u_2^{(1)} \\
& \vec{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T \\
\omega_2 : \qquad & 2\omega_0^2 u_1^{(2)} - \omega_0^2 u_2^{(2)} = 3\omega_0^2 u_1^{(2)} \\
& u_1^{(1)} = -u_2^{(2)} \\
& \vec{u}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T
\end{aligned}
\tag{38}
$$

iii) Bei der Anregung der Mode ω_1 schwingen die Teilchen synchron mit gleichen Phasen und Amplitden, der Abstand zwischen den Teilchen bleibt konstant. Bei der Anregung der Mode ω_2 schwingen die Teilchen mit gleichen Amplituden aber gegenphasig.

3. Da es zwei unterschiedliche, einfach Eigenwerte gibt, sind die beiden Eigenvektoren orthogonal. Es gilt:

$$
\vec{u}^{(l)} \cdot \vec{x}(t) = a_l cos(\omega_l t + \alpha_l) \qquad \vec{u}^{(l)} \cdot \dot{\vec{x}}(t) = -\omega_l a_l sin(\omega_l t + \alpha_l) \tag{39}
$$

Das dies für alle t gilt, können wir t = 0 setzen und die Parameter a_l und α_l mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmen. Für die erste Mode erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
0 = \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{x}(0) = a_1 cos(\alpha_1) \qquad & \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}} = \vec{u}^{(1)} \cdot \dot{\vec{x}}(0) = -\omega_1 a_1 sin(\alpha_1) \\
\alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2} \qquad & a_1 = \mp\frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_1}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Wegen der Identität $\mp cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = sin(x)$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets das untere Vorzeichen ($\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, a_1 = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_1}$) gewählt werden. Für die zweite Mode erhalten wir analog:

$$
\begin{aligned}
0 = \vec{u}^{(2)} \cdot \vec{x}(0) = a_2 cos(\alpha_2) \qquad & \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}} = \vec{u}^{(2)} \cdot \dot{\vec{x}}(0) = -\omega_2 a_2 sin(\alpha_2) \\
\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \qquad & a_2 = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_2}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

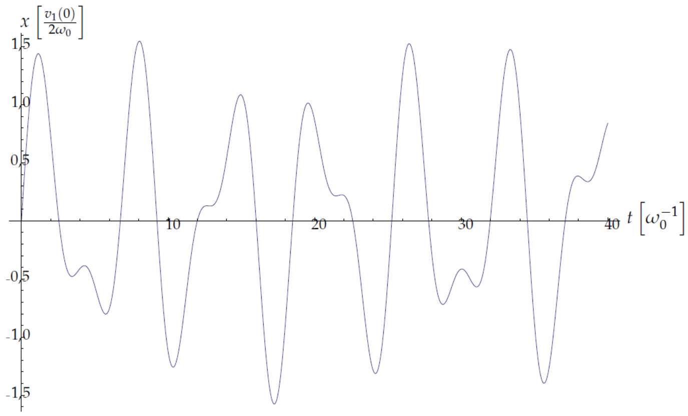
Die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen erfüllt, lautet also:

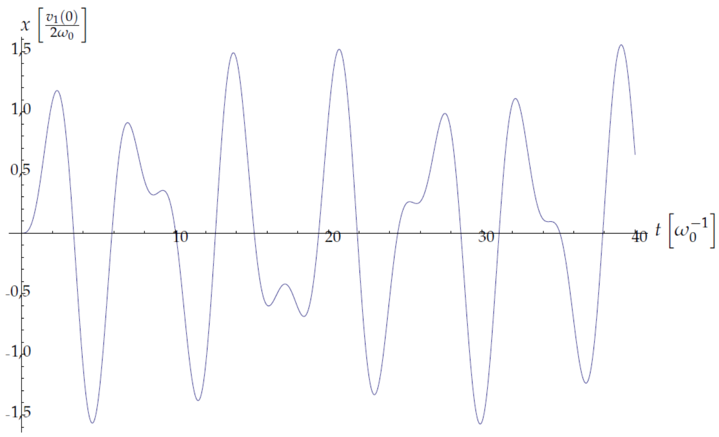
$$
\vec{x} = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_0}\left(sin(\omega_0 t)\vec{u}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\vec{u}^{(2)}\right) \tag{42}
$$

oder in Komponenten:

$$x_1(t) = \frac{v_1(0)}{2\omega_0}\left(sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}} sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\right)$$
$$x_2(t) = \frac{v_1(0)}{2\omega_0}\left(sin(\omega_0 t) - \frac{1}{\sqrt{3}} sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\right) \tag{43}$$

Die Skizzen zeigen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.



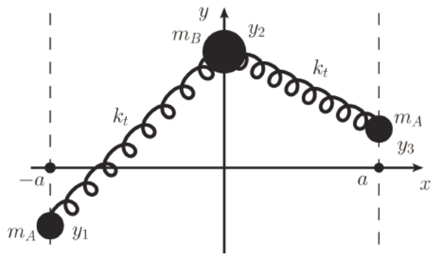


5 Transversale Molekülschwingungen

Betrachten Sie nun transversale Schwingungen eines Moleküls d.h. Biegeschwingungen in y-Richtung.

1. Verwenden Sie folgendes Potential U_t für die Bewegung:

$$U_t = \frac{k_t}{2}[(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \tag{44}$$



Geben Sie die Lagrangefunktion an und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Atome in Matrixform an.

2. Welche Eigenfrequenzen und -moden besitzt das System?

Lösung:

Es handelt sich hier um transversale Schwingungen, d.h. Schwingungen parallel zur y-Achse. Als Koordinaten verwenden wir $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, also die y-Koordinaten der Atome mit den Massen m_A, m_B bzw. m_A.

1. Das Potential U_t für die transversalen Schwingungen des Moleküls ist gegeben durch

$$U_t = \frac{k_t}{2}[(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \tag{45}$$

Dabei handelt es sich um das Potential von zwei Federn mit Federkonstanten k_t, deren jeweilige Ruhelänge 0 ist.
Die Lagrangefunktion ist dann:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_A\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_A\dot{y}_3^2 - \frac{k_t}{2}[(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \tag{46}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = m_A\ddot{y}_1 + k_t(y_1 - y_2) = 0 \tag{47}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial L}{\partial y_2} = m_B\ddot{y}_1 + k_t(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0 \tag{48}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_3} = m_A\ddot{y}_3 + k_t(-y_2 + y_3) = 0 \tag{49}$$
$$\tag{50}$$

was sich zur Matrixschreibweise formulieren lässt als

$$\begin{pmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & m_A \end{pmatrix} \ddot{\vec{y}} = -k_t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \tag{51}$$

2. Um die Eigenschwingungen und -frequenzen der Molekühlschwingungen zu berechnen, machen wir den Ansatz $\vec{y}(t) = \vec{v}e^{i\omega t}$. Dieser Ansatz führt auf folgende Eigenwertgleichung für die Eigenvektoren $\vec{v}$ und für die Eigenwerte ω^2, die den Eigenschwingungen bzw. den Eigenfrequenzen entsprechen:

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1/m_A & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_B & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_A \end{pmatrix} \cdot k_t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} - \omega^2 \cdot 1 \right) \vec{v} = 0 \tag{52}$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus:

$$0 = \det[A - \omega^2 \cdot 1] = \omega^2 \left(\frac{k_t}{m_A} - \omega^2 \right) \left[\omega^2 - \left(\frac{k_t}{m_A} + \frac{2k_t}{m_B} \right) \right] \tag{53}$$

also

$$\omega_0 = 0; \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_t}{m_A}}; \quad \omega_a = \sqrt{k_t \frac{2m_A + m_B}{m_A m_B}} \tag{54}$$

Die Eigenfrequenzen sind:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m_A}{m_B} \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{55}$$