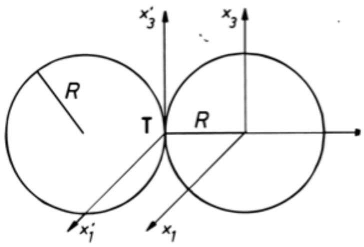
Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 4 - Angabe

1 Zwei Kugeln und der Satz von Steiner

Nehmen Sie zwei Kugeln mit identischem Radius R und gleicher homogener Dichteverteilung ρ, welchem am Punkt T zusammengeklebt sind. Berechnen Sie den gesamten Trägheitstensor relativ zum Schwerpunkt der beiden Kugeln am Punkt T.



2 Rollender Zylinder in Zylinder

Ein homogener Zylinder (Gesamtmasse M, Radius a, Trägheitsmoment bezüglich seiner Symmetrieachse $\Theta_{zz} = \frac{Ma^2}{2}$) rollt ohne Schlupf unter dem Einfluss auf der Innenseite eines festen Zylinders. Der innere Radius dieses festen Zylinders ist R.

1. Beweisen Sie, dass die folgende Rollbedingung für die Winkelgeschwindigkeit des rollenden Zylinders gilt:

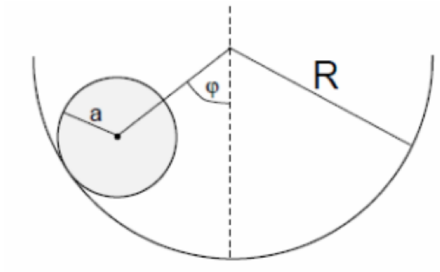
$$\omega_z = \dot{\varphi}\frac{R-a}{a} \tag{1}$$

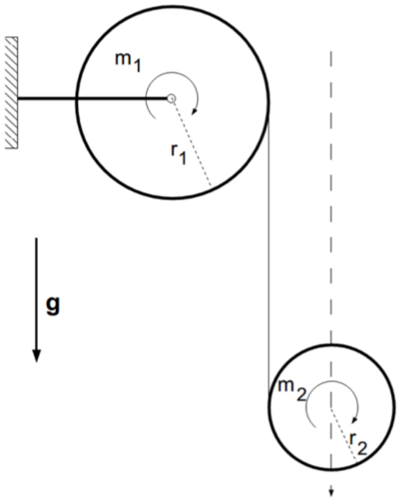
   Dabei ist φ der Winkel zwischen der festen vertikalen Achse und der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Zylinder.

2. Benutzen Sie die Rollbedingung, um die kinetische Energie des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Geben Sie die Lagrangefunktion des Zylinders an.
   Hilfe: Bestimmen Sie zuerst die Bahngeschwindigkeit v_S des Schwerpunkts des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$. Überlegen Sie dann mittels der Rollbedingung den Zusammenhang zwischen v_S und der Winkelgeschwindigkeit ω_z der Drehung des rollenden Zylinders um seinen Schwerpunkt. Beachten Sie, dass die gesamte kinetische Energie die Summe aus Schwerpunkts- und Rotationsbewegung um den Schwerpunkt ist.

3 Verspulte Scheibchen

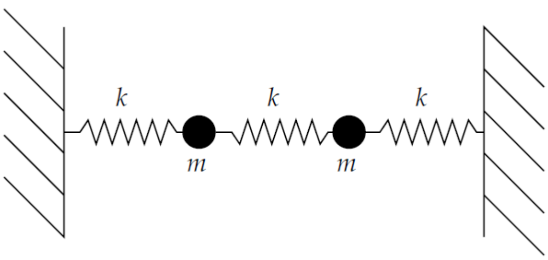
Zwei homogene Scheiben der Massen m_1, m_2 und Radien r_1, r_2 sind von einem masselosen Faden umwickelt. Scheibe 1 kann um ihre Symmetrieachse rotieren und ist ansonsten fixiert. Während Scheibe 2 herunter fällt, wickelt sich der Faden ab. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und die Kraft, welche entlang dem Faden wirkt. Überlegen Sie sich vorher, wie beim Abrollen die Winkel φ_1 und φ_2 - welche die Rotation der Scheiben beschreiben - mit der Position x_2 von m_2 zusammenhängen.





4 Gekoppelte Oszillatoren

Zwei Teilchen der Masse m sind über drei identische Federn mit Federkonstanten $k = m\omega_0^2$ miteinander und mit den Wänden verbunden. Die Bewegung der Teilchen ist auf die Achse eingeschränkt (longitudinale Schwingung). Die Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage wird mit x_1 und x_2 bezeichnet.



1. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen im Falle kleiner Auslenkungen lauten:

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \tag{2}$$

2. Durch die Einführung des Auslenkvektors $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ erhält man die Bewegungsgleichungen in Matrixform:

$$\ddot{\vec{x}} + \hat{A}\vec{x} = 0 \tag{3}$$

mit $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$. Durch den Ansatz:

$$\vec{x} = acos(\omega t + \alpha)\vec{u} \tag{4}$$

reduziert sich das Problem auf das Eigenwertproblem:

$$\hat{A}\vec{u} = \omega^2\vec{u} \tag{5}$$

i) Bestimmen Sie die zwei Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Gleichung (5) nichttriviale Lösungen $\vec{u} \neq \vec{0}$ hat.

ii) Finden Sie dazugehörige, normierte Eigenvektoren $\vec{u}^{(1)}$ und $\vec{u}^{(2)}$.

iii) Diskutieren Sie die Art der kollektiven Bewegung der Teilchen, falls die Mode ω_1 bzw. ω_2 angeregt ist.

Hinweis: Die Gleichung (5) hat nicht-triviale Lösungen bei $\omega = \omega_l$, wenn ω_l die Lösung der Gleichung:

$$det(\hat{A} - \omega_l^2\hat{\mathbb{1}}) = 0 \tag{6}$$

ist. Die Eigenvektoren erhält man dann aus der Gleichung:

$$\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2\vec{u}^{(l)} \tag{7}$$

3. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet:

$$\vec{x} = a_1cos(\omega_1 t + \alpha_1)\vec{u}^{(1)} + a_2cos(\omega_2 t + \alpha_2)\vec{u}^{(2)} \tag{8}$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit folgenden Anfangsbedingungen:

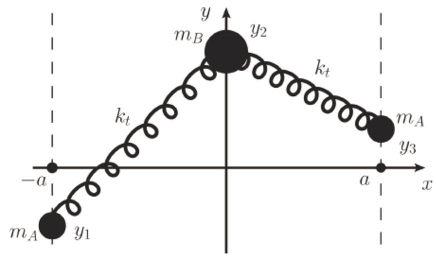
$$\vec{x}(0) = \vec{0} \qquad \dot{\vec{x}}(0) = (v_1^{(0)}, 0)^T \tag{9}$$

und skizzieren Sie $x_2(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren.

5 Transversale Molekülschwingungen

Betrachten Sie nun transversale Schwingungen eines Moleküls d.h. Biegeschwingungen in y-Richtung.



1. Verwenden Sie folgendes Potential U_t für die Bewegung:

$$U_t = \frac{k_t}{2}\left[(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\right] \tag{10}$$

   Geben Sie die Lagrangefunktion an und leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Atome in Matrixform an.

2. Welche Eigenfrequenzen und -moden besitzt das System?