Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 3 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Keplers 3. Gesetz

Das 3. Keplersche Gesetz für die Plantenbewegung besagt, dass das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten gleich ist. Hier ist T die Umlaufzeit, a die große Halbachse der Ellipsenbahn. Dieses Gesetz gilt nur für ein Zweikörperproblem unter der Annahme, dass die Masse der Sonne M sehr groß gegenüber der Masse des Planeten m. Beweisen Sie dieses Gesetz, ausgehend von der Drehimpulserhaltung.
Hinweis: Starten Sie mit dem Ausdruck für den Betrag des Drehimpulses $l = \mu r^2 \dot{\vartheta}$ (μ ist die reduzierte Masse, r der momentane Abstand Sonne-Planet und ϑ der Winkel des Fahrstrahls zur x - Achse) und integrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung über die Umlaufzeit. Benutzen Sie dann die Beziehungen für Aphel- und Perihel-Achse und die Näherung $m \ll M$.

Lösung:

Die Drehimpulserhaltung:

$$l = \mu r^2 \dot{\vartheta} = const. \tag{1}$$

Integration über die Umlaufzeit liefert:

$$\int_0^T l dt = \int_0^T \mu r^2 \dot{\vartheta} dt \tag{2}$$

$$lT = \int_0^{2\pi} \mu r^2 d\vartheta = 2\mu \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = 2\mu\pi ab \tag{3}$$

Jetzt benutzen wir die Beziehungen für die Halbachsen der Ellipse:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \quad , \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{4}$$

Damit bekommen wir:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu^2 b^2}{l^2 a} = \frac{4\pi^2\mu^2 p}{l^2} \tag{5}$$

Mithilfe des Ausdrucks für den Parameter p:

$$p = \frac{l^2}{\alpha\mu} \tag{6}$$

bekommen wir das Endergebnis:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} \tag{7}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nicht konstant (hängt von der Masse m) :

$$\alpha = GMm \quad , \quad \mu = \frac{Mm}{M+m} \tag{8}$$

und damit:

$$\frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \tag{9}$$

Für den Fall $m \ll M$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM} = const. \tag{10}$$

2 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und Ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

1. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen sie die zugehörige potentielle Energie und geben Sie den Energieerhaltungssatz an.
2. Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt?
3. Beweisen Sie den Zusammenhang:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \tag{11}$$

Hier ist r der Abstand vom Ursprung und $\vec{L}$ ist der Drehimpuls.
Hinweis: Berechen Sie $\vec{L}^2$ und benutzen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Lösung:

1. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet hier:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r}) = -K\vec{e}_r \tag{12}$$

Es liegt ein Zentralkraftfeld vor, so dass die Kraft konservativ ist. Integration in radialer Richtung liefert die potentielle Energie:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = +K \int \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = K \int dr = K|\vec{r}| \tag{13}$$

(Die Integrationskonstante ist hier zu Null angenommen.) Der Energieerhaltungssatz lautet somit:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + K|\vec{r}| \tag{14}$$

2. Weil das vorliegende Kraftfeld ein Zentralfeld ist, ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Expliziter Nachweis:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt} m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 - K\vec{r} \times \vec{e}_r = 0 \tag{15}$$

   Wegen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ liegen alle Bahnpunkte in einer Ebene, deren Normalenvektor durch den konstanten Drehimpulsvektor $\vec{L}$ gegeben ist.

3. Für eine ebene Bewegung gilt in Polarkoordinaten einerseits:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{16}$$

   und andererseits:

$$L = L_z = mr^2\dot{\varphi} \tag{17}$$

   Wenn man hier $\dot{\varphi}$ eliminiert, erhält man:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \tag{18}$$

   Alternativ:

$$\vec{L}^2 = m^2(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = m^2(\vec{r}^2\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2r^2(\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2r^2(\dot{\vec{r}}^2 - \dot{r}^2) \tag{19}$$

   Daraus ergibt sich die gesuchte Beziehung:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} \tag{20}$$

3 Kanonischer Impuls und zyklische Koordinaten

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem externen Magnetfeld lautet:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - \frac{q}{2}\dot{\vec{x}} \cdot (\vec{x} \times \vec{B}) \tag{21}$$

Bestimmen sie für ein konstantes $\vec{B} = (0, 0, B)^T$ alle kanonischen Impulse und alle zyklischen Koordinaten. Gibt es erhaltene kanonische Impulse? Wenn ja, welche sind dies?

Lösung:

Wir erhalten für die kanonischen Impulse:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} - \frac{q}{2}\vec{x} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} m\dot{x}_1 - \frac{q}{2}Bx_2 \\ m\dot{x}_2 + \frac{q}{2}Bx_1 \\ m\dot{x}_3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Wir berechnen nun mit Hilfe von $\dot{\vec{x}}(\vec{x}\times\vec{B}) = \vec{x}\times(\vec{B}\times\dot{\vec{x}})$:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\frac{q}{2}\vec{B}\times\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{q}{2}B\dot{x}_2 \\ -\frac{q}{2}B\dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

also ist x_3 zyklisch und demnach $p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3$ erhalten.

4 Zeitabhängige Lagrange-Funktion und geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Betrachten Sie zuerst die zeitabhängige Lagrange-Funktion:

$$L_1 = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \quad , \quad \gamma > 0 \tag{24}$$

1. Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
2. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung.
3. Betrachten Sie im Folgenden die Lagrange-Funktion:

   $$L_2 = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \tag{25}$$

   zusammen mit der dissipativen Funktion:

   $$F = \frac{m}{2}\gamma\dot{q}^2 \tag{26}$$

   Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
4. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von Teilaufgabe 2.

Lösung:

1. Die kanonischen Impulse für die erste Lagrange-Funktion lauten:

   $$p = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} = me^{\gamma t}\dot{q} \tag{27}$$

   Die Koordinate q ist nicht zyklisch.

2. Für die Bewegungsgleichung erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_1}{\partial q} = me^{\gamma t}\ddot{q} + m\gamma e^{\gamma t}\dot{q} + ke^{\gamma t}q = 0 \tag{28}$$

$$\Longrightarrow \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \tag{29}$$

Das beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator. Wir verwenden den Ansatz:

$$q(t) = Aexp\omega t \tag{30}$$

woraus die folgende charakteristische Gleichung folgt:

$$\omega^2 + \gamma\omega + \frac{k}{m} = 0 \tag{31}$$

Dies Gleichung hat abhängig von γ eine oder zwei Lösungen:

$$\omega_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}} \quad , \quad \gamma > \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{32}$$

$$\omega_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}} \quad , \quad \gamma < \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{33}$$

$$\omega = -\frac{\gamma}{2} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{34}$$

woraus wir die folgende Lösungen erhalten:

$$q(t) = A_1 exp\omega_1 t + A_2 exp\omega_2 t \quad , \quad \gamma \neq \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{35}$$

$$q(t) = (A + Bt)exp - \frac{\gamma t}{2} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{36}$$

3. Die kanonischen Impulse für die zweite Lagrange-Funktion lauten:

$$p = \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{37}$$

Die Koordinate q ist nicht zyklisch.

4. Die Euler-Lagrange-Gleichungen mit dem dissipativen Term lauten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_2}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \tag{38}$$

oder:

$$m\ddot{q} + kq = -m\gamma\dot{q} \Longrightarrow \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \tag{39}$$

Diese Bewegungsgleichung und deren Lösungen sind mit der von 2. identisch. Das Beispiel zeigt, dass zeitabhängige Lagrange-Funktionen genutzt werden können um Dissipation zu beschreiben.

5 $\frac{1}{r^2}$ - Potential

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im Potential:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{40}$$

mit $\alpha > 0$.

1. Skizzieren Sie das effektive Potential für die Fälle:
   (a) $L^2 > 2m\alpha \quad , \quad E > 0$
   (b) $L^2 < 2m\alpha \quad , \quad E > 0$
2. Bestimmen Sie in den beiden Fällen aus 1. jeweils die radiale Koordinate r als Funktion des Winkels φ sowie die Zeit t als Funktion von r. Welche Bewegung führt der Massenpunkt aus?

Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a}$.

Lösung:

Als effektives Potential bezeichnet man diejenige Funktion $V_{eff}(r)$, die den winkelabhängigen Anteil der kinetischen Energie und die potentielle Energie vereint. Für ein Zentralpotential ergibt sich mit Polarkoordinaten in der Ebene die Bewegung:

$$E = E_{kin} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)} \tag{41}$$

wobei wir benutzt haben, dass $L = mr^2\dot{\varphi}$ erhalten ist.

1. Für das gegebene Potential gilt konkret:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} = \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha\right)\frac{1}{r^2} \tag{42}$$

   Es ergibt sich also wieder ein $\frac{1}{r^2}$ - Potential mit (a) positivem bzw. (b) negativem Vorfaktor

2. Erhaltungssätze stellen oft einen einfacheren Weg zur Lösung eines Problems darf als die Bewegungsgleichungen, welche stets zweiter Ordnung sind. Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$const. = E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha\right)\frac{1}{r^2} \tag{43}$$

und liefert einen Zusammenhang zwischen $\dot{r}$ und r ohne weitere Ableitungen:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}E - \left(\frac{L^2}{m^2} - \frac{2\alpha}{m}\right)\frac{1}{r^2} \tag{44}$$

(a) Gleichung (44) kann durch Trennung der Variablen integriert werden, um t als Funktion von r zu erhalten. Da wir nur an Zeitdifferenzen interessiert sind, lassen wir das Integral unbestimmt:

$$t(r) = \pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \left(\frac{L^2}{m^2} - \frac{2\alpha}{m}\right)\frac{1}{x^2}}} dx \tag{45}$$

Der Integrand vereinacht sich durch Einführung von $b = \frac{L^2-2m\alpha}{2mE}$ zu:

$$t(r) = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{x^2}}} dx = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\, r\sqrt{1 - \frac{b}{r^2}} = \pm\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 + \alpha - \frac{L^2}{2m}} \tag{46}$$

Um $\varphi(r)$ zu berechnen, verwenden wir Drehimpulserhaltung und drücken $\frac{d\varphi}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel durch $\frac{dr}{d\varphi}$ aus:

$$const. = L = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\frac{d\varphi}{dr}\dot{r} \tag{47}$$

woraus wir mit Gleichung (44) einen Zusammenhang zwischen $\frac{d\varphi}{dr}$ und r ohne weitere Ableitungen erhalten:

$$L\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2\sqrt{2mE - (L^2 - 2m\alpha)\frac{1}{r^2}} \tag{48}$$

Auf diese Weise erhalten wir wieder eine Differentialgleichung, die wir durch Trennung der Variablen integrieren können, wobei das Vorzeichen von $\dot{r}$ noch festgelegt werden muss. Wir erhalten für den Winkel:

$$\varphi(r) = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{L}{x^2\sqrt{2mE - (L^2 - 2m\alpha)\frac{1}{x^2}}} dx \tag{49}$$

wobei wir eine Integrationskonstante r_0 in Form der Integralgrenze eingeführt und $\varphi(r_0) = 0$ gesetzt haben. Der Integrand vereinfacht sich durch eine Einführung der charakteristischen Länge $a = \sqrt{\frac{L^2-2m\alpha}{2mE}}$ zu:

$$\varphi(r) = \pm \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} dx \tag{50}$$

Durch die Substitution mit der dimensionslosen Variable $u = \frac{a}{x}$, $\frac{du}{dx} = -\frac{a}{x^2}$ bringen wir das Integral in die Form des Arcussinus-Integrals aus dem Hinweis. Für $e < a$ ist der Integrand komplex, wir wählen daher die Integrationskonstante am unteren Rand des zulässigen Bereichs $r_0 = a$, was gleichzeitig das positive Vorzeichen fixiert, und erhalten:

$$\varphi(r) = -\frac{L}{a\sqrt{2mE}} \int_{1}^{\frac{a}{r}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} \left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{a}{r} \right) \tag{51}$$

Invertieren dieser Beziehung ergibt:

$$r = \frac{a}{sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a\sqrt{2mE}}{L}\varphi\right)} = \frac{a}{cos\frac{a\sqrt{2mE}}{L}\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{L^2-2m\alpha}{2mE}}}{cos\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{L^2}}} \tag{52}$$

(b) Die analoge Umformung zu Fall (a) mit der charakteristischen Länge $a = \sqrt{\frac{2m\alpha - L^2}{2mE}}$ ergibt, wobei wir hier $r_0 \longrightarrow \infty$ wählen und daher das negative Vorzeichen wählen müssen:

$$\varphi(r) = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} \int_{0}^{\frac{a}{r}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} arsinh\frac{a}{r} \tag{53}$$

Invertieren dieser Beziehung ergibt:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2m\alpha - L^2}{2mE}}}{sinh\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{L^2} - 1}} \tag{54}$$

Im Fall (a) kann sich der Massenpunkt dem Ursprung nur bis auf $a = \frac{L^2-2m\alpha}{2mE}$ nähern und läuft dann nach $r \longrightarrow \infty$. Im Fall (b) fällt der Massenpunkt auf einer Spiralbahn ins Zentrum. Dabei läuft er beginnend beim Abstand r unendlich oft um ($\varphi \longrightarrow \infty$), erreicht den Ursprung aber nach endlicher Zeit:

$$\delta t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{Er^2 + \alpha - \frac{L^2}{2m}} - \sqrt{\alpha - \frac{L^2}{2m}} \right) \tag{55}$$