Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 3 - Angabe

1 Keplers 3. Gesetz

Das 3. Keplersche Gesetz für die Plantenbewegung besagt, dass das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten gleich ist. Hier ist T die Umlaufzeit, a die große Halbachse der Ellipsenbahn. Dieses Gesetz gilt nur für ein Zweikörperproblem unter der Annahme, dass die Masse der Sonne M sehr groß gegenüber der Masse des Planeten m. Beweisen Sie dieses Gesetz, ausgehend von der Drehimpulserhaltung.
Hinweis: Starten Sie mit dem Ausdruck für den Betrag des Drehimpulses $l = \mu r^2 \dot{\vartheta}$ (μ ist die reduzierte masse, r der momentane Abstand Sonne-Planet und ϑ der Winkel des Fahrstrahls zur x - Achse) und integrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung über die Umlaufzeit. Benutzen Sie dann die Beziehungen für Aphel- und Perihel-Achse und die Näherung $m \ll M$.

2 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und Ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

1. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen sie die zugehörige potentielle Energie und geben Sie den Energieerhaltungssatz an.

2. Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt?

3. Beweisen Sie den Zusammenhang:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \tag{1}$$

   Hier ist r der Abstand vom Ursprung und $\vec{L}$ ist der Drehimpuls.
   Hinweis: Berechen Sie $\vec{L}^2$ und benutzen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

3 Kanonischer Impuls und zyklische Koordinaten

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen mit Masse m und Ladung q in einem externen Magnetfeld lautet:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - \frac{q}{2} \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{x} \times \vec{B}) \tag{2}$$

Bestimmen sie für ein konstantes $\vec{B} = (0, 0, B)^T$ alle kanonischen Impulse und alle zyklischen Koordinaten. Gibt es erhaltene kanonische Impulse? Wenn ja, welche sind dies?

4 Zeitabhängige Lagrange-Funktion und geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Betrachten Sie zuerst die zeitabhängige Lagrange-Funktion:

$$L_1 = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \quad , \quad \gamma > 0 \tag{3}$$

1. Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
2. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung.
3. Betachten Sie im Folgenden die Lagrange-Funktion:

   $$L_2 = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \tag{4}$$

   zusammen mit der dissipativen Funktion:

   $$F = \frac{m}{2}\gamma\dot{q}^2 \tag{5}$$

   Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
4. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von Teilaufgabe 2.

5 $\frac{1}{r^2}$ - Potential

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im Potential:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{6}$$

mit $\alpha > 0$.

1. Skizzieren Sie das effektive Potential für die Fälle:
   (a) $L^2 > 2m\alpha \quad , \quad E > 0$
   (b) $L^2 < 2m\alpha \quad , \quad E > 0$
2. Bestimmen Sie in den beiden Fällen aus 1. jeweils die radiale Koordinate r als Funktion des Winkels φ sowie die Zeit t als Funktion von r. Welche Bewegung führt der Massepunkt aus?

Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a}$.