Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 2 - Lösung

1 Perle

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem vertikal stehenden Ring vom Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im homogenen Schwerefeld $-g\vec{e}_z$.
Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie lautet die Lagrangegleichung 2.Art? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge ϑ zur Anfangsbedingung $\dot{\vartheta}(0) = 0$.

Lösung:

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 sin\vartheta\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}R^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 sin^2\vartheta) \tag{1}$$

Potentielle Energie:

$$U = mgz = -mgRcos\vartheta \tag{2}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{m}{2}R^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 sin^2\vartheta) + mgRcos\vartheta \tag{3}$$

Lagrangegleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \tag{4}$$

$$mR^2\ddot{\vartheta} = mR^2\omega^2 sin\vartheta cos\vartheta - mgRsin\vartheta \tag{5}$$

Zwangsbedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = R^2 \tag{6}$$

$$\frac{y}{x} = tan\varphi = tan(\omega t) \tag{7}$$

Für kleine Ausschläge nähere $sin\vartheta \simeq \vartheta, cos\vartheta \simeq 1$:

$$mR^2\ddot{\vartheta} = (mR^2\omega^2 - mgR)\vartheta \tag{8}$$

$$\ddot{\vartheta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)\vartheta \tag{9}$$

Für $|\omega| < \sqrt{\frac{g}{R}}$ (genügend langsame Rotation):

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 cos\left(\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}t\right) \tag{10}$$

Im Fall $|\omega| > \sqrt{\frac{g}{R}}$ (schnelle Rotation) ergibt sich die exponentiell anwachsende Lösung:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 cosh\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}}t\right) \tag{11}$$

2 Fallende Kette

Eine feingliedrige Kette der Länge L und Masse m (konstante Masse pro Länge $\mu = \frac{m}{L}$) werde so über einer Tischplatte festgehalten, dass das unterste Glied diese gerade berührt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Kette losgelassen. Es wirke nun die Fallbeschleunigung g nach unten. Verwenden Sie als generalisierte Koordinate die Höhe z des obersten Kettenglieds.
Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(z, \dot{z})$ des Systems auf und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung für z.
Zeigen Sie, dass die Energieerhaltung gilt und geben Sie die Geschwindigkeit $|\dot{z}|$ des obersten Kettenglieds als Funktion der Höhe $0 < z < L$ an. Berechnen Sie die Fallzeit τ der Kette. Sie werden auf das elliptische Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{sinx} = \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 1,19814$ stoßen.
Vergleichen Sie das Ergebnis für τ mit der Zeit τ_0, die dieselbe Kette benötigt, um neben dem Tisch die Strecke L frei zu fallen. Wie erklären Sie sich die unterschiedlichen Fallzeiten?

Lösung:

Die im Schwerefeld bewegte Massen ist μz, jedes Kettenglied hat die Geschwindigkeit $\dot{z}$:

Kinetische Energie:

$$T = \frac{\mu}{2} z\dot{z}^2 \tag{12}$$

Der Schwerpunkt des Kettenstücks über dem Tisch liegt auf halber Höhe $\frac{z}{2}$.

Potentielle Energie:

$$U = \mu z g \frac{z}{2} = \frac{\mu g}{2} z^2 \tag{13}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 - gz^2) \tag{14}$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}(\mu z\dot{z}) = \mu(\dot{z}^2 + z\ddot{z}) = \frac{\mu}{2}(\dot{z}^2 - 2gz) \tag{16}$$

$$z\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{2} + gz = 0 \tag{17}$$

Wir zeigen Energieerhaltung:

$$E = T + U = \frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 + gz^2) \tag{18}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mu}{2}(\dot{z}\dot{z}^2 + 2z\dot{z}\ddot{z}^2 + 2gz\dot{z}) = \mu\dot{z}(z\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + gz) = 0 \tag{19}$$

Mit Energieerhaltung folt aus (18):

$$\frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 + gz^2) = \frac{\mu}{2}gL^2 \tag{20}$$

$$z\dot{z}^2 = g(L^2 - z^2) \tag{21}$$

$$\dot{z} = -\sqrt{\frac{g}{z}(L^2 - z^2)} \tag{22}$$

somit:

$$dt = -dz\sqrt{\frac{z}{g(L^2 - z^2)}} \tag{23}$$

Fallzeit:

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\tau d\tau = \int_0^L dz \frac{1}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{z}{L^2 - z^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\sqrt{sinx} = \sqrt{\frac{2L}{\pi g}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{2L}{g}}\frac{1,19814}{\sqrt{2}} = 0,847213\sqrt{\frac{2L}{g}} \end{aligned} \tag{24}$$

Das Weg-Zeit-Gesetz für eine frei neben dem Tisch fallende Kette ist:

$$z(t) = L - \frac{g}{2}t^2 \tag{25}$$

somit:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{26}$$

Überraschendes Ergebnis: $\tau < \tau_0$

Die auf dem Tisch auftreffenden Kettenglieder werden von der Geschwindigkeit $|\dot{z}|$ auf 0 abgebremst. Aufgrund der Energieerhaltung wird deren kinetische Energie an den Rest der Kette über dem Tisch abgegeben.

3 Bewegung auf Paraboloid

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitation auf der Oberfläche eines Paraboloids:

$$x^2 + y^2 = az \tag{27}$$

Verwenden Sie x und y als generalisierte Koordinaten, eliminieren Sie z und $\dot{z}$ aus der kinetischen und der potentiellen Energie und finden Sie die Lagrangefunktion für dieses System. Finden Sie als nächstes einen Ausdruck für die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten durch Eliminierung von x und y und deren Ableitungen.

Lösung:

Es gilt:

$$z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2) \tag{28}$$

$$\dot{z} = \frac{2}{a}(x\dot{x} + y\dot{y}) \tag{29}$$

Somit bekommt man für die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2m}{a}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 \tag{30}$$

sowie für die potentielle Energie:

$$V = mgz = \frac{mg}{a}(x^2 + y^2) \tag{31}$$

Damit bekommt man für die Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2m}{a^2}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 - \frac{mg}{a}(x^2 + y^2) \tag{32}$$

Geht man zu Zylinderkoordinaten über, so hat man:

$$\begin{aligned} &x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi, \\ &\dot{x} = \dot{\rho} cos\varphi - \rho\dot{\varphi} sin\varphi, \dot{y} = \dot{\rho} sin\varphi + \rho\dot{\varphi} cos\varphi \end{aligned} \tag{33}$$

und somit für die Lagrangefunktion:

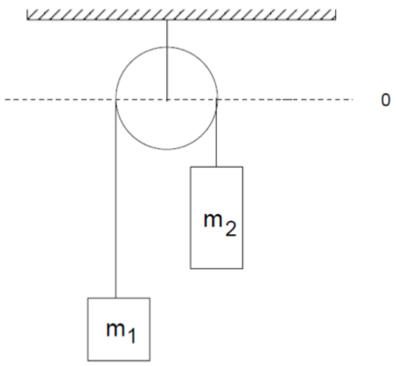
$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2m\rho^2\dot{\rho}^2}{a^2} - \frac{mg\rho^2}{a} \tag{34}$$

4 Flaschenzug

Die Masse m_1 hänge an dem einen Ende einer masselosen Schnur, welche über einen fixierten, reibungsfreien und nicht rotierenden Flaschenzug geführt worden sei. Am anderen Ende der Schnur hänge die Masse m_2. Schreiben Sie die newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form:

$$m_1\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_i + \vec{C}_i \tag{35}$$

worin $\vec{F}_i$ für die äußere Kraft auf die Masse $m_i (i = 1, 2)$ durch die Gravitation und $\vec{C}_i$ für die Zwangskraft stehen soll. Bestimmen Sie die Zwangskraft für beide Massen und die finalen Bewegungsgleichungen. Verwenden Sie die zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmung der Zwangskraft.



Lösung:

Die geometrische Zwangsbedingung lautet:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + R\pi - L = 0 \tag{36}$$

und der Ansatz für die Zwangskräfte:

$$C_i = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \tag{37}$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$m_i \ddot{x}_i - m_i g = \lambda \tag{38}$$

bzw. ausführlich:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\lambda + m_1 g}{m_1} \quad , \quad \ddot{x}_2 = \frac{\lambda + m_2 g}{m_2} \tag{39}$$

Aus der zweiten Zeitableitung von f folgt:

$$C_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda = -2 \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = -2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} g \tag{40}$$

Die finalen Bewegungsgleichungen lauten also nun:

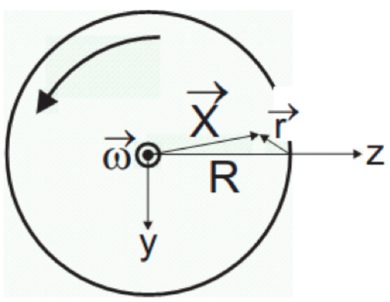
$$\ddot{x}_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tag{41}$$

5 Fallender Stein

Wir lassen einen Stein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch:

$$m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \vec{F}_g - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{X}}{dt} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{X}) \tag{42}$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z - Achse durch die Brunnenöffnung verläuft. Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.



1. Führen Sie die Relativkoordinate:

$$\vec{r} = \vec{X} - R\vec{e}_z \tag{43}$$

ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\vec{F}_g = -mg_0\vec{e}_z$ die der ruhenden Erde und unabhängig von $\vec{r}$ ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von $\vec{r}$ ist, was für nicht zu tiefen Brunnen näherungsweise zutrifft.

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{eff} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt.

3. Ausgehend von dieser Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$ und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{u}) \tag{44}$$

4. Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\vec{u}$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (44) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\vec{u}(t)$. Zeigen SIe, dass die Trajektorie $\vec{e}(t)$ gegenüber $\vec{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird.

Lösung:

1. Nach der Zeichnung gilt:

$$\vec{X} = R\vec{e}_z + \vec{r} \tag{45}$$

wobei R der Erdradius ist. Exakt gilt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g_0\vec{e}_z - \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (R\vec{e}_z + \vec{r})] - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{46}$$

Wir vernachlässigen die $\vec{r}$ - Abhängigkeit der Zentrifugalkraft:

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (R\vec{e}_z + \vec{r})] \approx -\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times R\vec{e}_z] \tag{47}$$

Wegen $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ gilt:

$$-\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times R\vec{e}_z] = \omega^2 R\vec{e}_z \tag{48}$$

Damit bekommen wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-g_0 + \omega^2 R)\vec{e}_z - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{49}$$

2. Ohne die Corioliskraft vereinfacht sich die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -g_0\vec{e}_z + \omega^2 R\vec{e}_z \tag{50}$$

   und wir erhalten mit geeigneten Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}_0(t) = -\frac{1}{2}[d_0 - \omega^2 R]\vec{e}_z t^2 = \frac{1}{2}g_{eff}\vec{e}_z t^2 \tag{51}$$

3. Wir gehen mit dem Ansatz:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{u}(t) \tag{52}$$

   in die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g_{eff}\vec{e}_z - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{53}$$

   und bekommen wegen:

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -g_{eff}\vec{e}_z \tag{54}$$

   als verbleibende Gleichung:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{55}$$

   Integration über t zusammen mit $\vec{u}(0) = \dot{\vec{u}}(0) = \vec{0}$ und $\vec{r}(0) = \vec{0}$ liefet dann die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{r} \tag{56}$$

4. Für kleine Abweichungen vom Lot ($|\vec{u}| \ll |\vec{r}_0|$) können wir $\vec{r}$ durch $\vec{r}_0$ ersetzen und bekommen als Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \vec{\omega} \times g_{eff}\vec{e}_z t^2 = g_{eff}t^2\vec{\omega} \times \vec{e}_z \tag{57}$$

   mit der Lösung:

$$\vec{u}(t) = \frac{g_{eff}t^3}{3}\vec{\omega} \times \vec{e}_z = -\frac{d_{eff}\omega t^3}{3}\vec{e}_y \tag{58}$$

6 Rotierende Bezugssysteme

Die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der Stelle $\vec{r}(t)$ in einem nicht-inertialen Bezugssystem, welches mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\vec{\omega}$ um den Ursprung rotiert ist gegeben durch:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{59}$$

Berechnen Sie die kartesischen Komponenten der Beschleunigung, falls $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_y$.

Lösung:

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_y$. Dies liefert für die Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{r}) \tag{60}$$

$$= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2\vec{e}_y(\vec{e}_y/cdot\vec{r}) + \omega^2\vec{e}_y^2\vec{r} \tag{61}$$

$$= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 y\vec{e}_y + \omega^2\vec{r} \tag{62}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{F_x}{m} - 2\omega\dot{z} + \omega^2 x \\ \frac{F_y}{m} \\ \frac{F_z}{m} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 z \end{pmatrix} \tag{63}$$