Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 2 - Angabe

1 Perle

EIne Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem vertikal stehenden Ring vom Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschiwndigkeit ω um seinen Durchmesser im homogenen Schwerefeld $-g\vec{e}_z$.
Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie lautet die Lagrangegleichung 2.Art? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge ϑ zur Anfangsbedingung $\dot{\vartheta}(0) = 0$.

2 Fallende Kette

Eine feingliedrige Kette der Länge L und Masse m (konstante Masse pro Länge $\mu = \frac{m}{L}$) werde so über einer Tischplatte festgehalten, dass das unterste Glied diese gerade berührt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Kette losgelassen. Es wirke nun die Fallbeschleunigung g nach unten. Verwenden Sie als generalisierte Koordinate die Höhe z des obersten Kettenglieds.
Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(z, \dot{z})$ des Systems auf und berechnen Sie daraus die Bewegungsleichung für z.
Zeigen Sie, dass die Energieerhaltung gilt und geben Sie die Geschwindigkeit $|\dot{z}|$ des obersten Kettenglieds als Funktoin der Höhe $0 < z < L$ an. Berechnen Sie die Fallzeit τ der Kette. Sie werden auf das elliptische Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\sqrt{sinx} = \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 1,19814$ stoßen.
Vergleichen Sie das Ergebnis für τ mit der Zeit τ_0, die dieselbe Kette benötigt, um neben dem Tisch die Strecke L frei zu fallen. Wie erklären Sie sich die unterschiedlichen Fallzeiten?

3 Bewegung auf Paraboloid

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitation auf der Oberfläche eines Paraboloids:

$$x^2 + y^2 = az \tag{1}$$

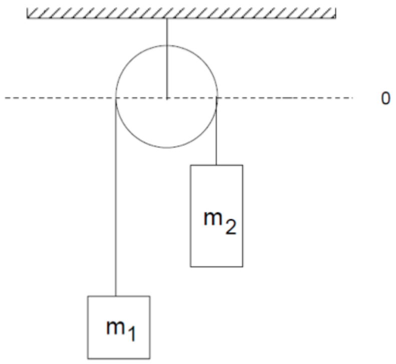
Verwenden Sie x und y als generalisierte Koordinaten, eliminieren Sie z und $\dot{z}$ aus der kinetischen und der potentiellen Energie und finden Sie die Lagrangefunktion für dieses System. Finden Sie als nächstes einen Ausdruck für die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten durch Eliminierung von x und y und deren Ableitungen.

4 Flaschenzug

Die Masse m_1 hänge an dem einen Ende einer masselosen Schnur, welche über einen fixierten, reibungsfreien und nichtrotierenden Flaschenzug geführt worden sei. Am anderen Ende der Schnur hänge die Masse m_2. Schreiben Sie die newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form:

$$m_1\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_i + \vec{C}_i \tag{2}$$

worin $\vec{F}_i$ für die äußere Kraft auf die Masse $m_i(i = 1,2)$ durch die Gravitation und $\vec{C}_i$ für die Zwangskraft stehen soll. Bestimmen Sie die Zwangskraft für beide Massen und die finalen Bewegungsgleichungen. Verwenden Sie die zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmund der Zwangskraft.

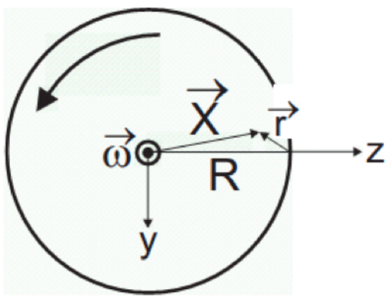


5 Fallender Stein

Wir lassen einen Strein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch:

$$m\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{F}_g - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{X}}{dt} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{X}) \tag{3}$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z - Achse durch die Brunnenöffnung verläuft. Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.



1. Führen Sie die Relativkoordinate:

$$\vec{r} = \vec{X} - R\vec{e}_z \tag{4}$$

ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunngenöffnung ist. Bestimmen Sie di Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\vec{F}_g = -mg_0\vec{e}_z$ die der ruhgenden Erde und unabhängig von $\vec{r}$ ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von $\vec{r}$ ist, was für nicht zu tiefen Brunnen näherungsweise zutrifft.

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{eff} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt.

3. Ausgehend von dieser Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$ und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{u}) \tag{5}$$

4. Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\vec{u}$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (5) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\vec{u}(t)$. Zeigen SIe, dass die Trajektorie $\vec{e}(t)$ gegenüber $\vec{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird.

6 Rotierende Bezugssysteme

Die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der Stelle $\vec{r}(t)$ in einem nicht-inertialen Bezugssystem, welches mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\vec{\omega}$ um den Ursprung rotiert ist gegeben durch:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{6}$$

Berechnen Sie die kartesischen Komponenten der Beschleunigung, falls $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_y$.