

# Probeklausur - Musterlösung 11/09/2015

## 1 Quickies

- (a) Was ist die definierende Eigenschaft von Fermionen und Bosonen?
- (b) Wie lauten die Energieeigenwerte  $E_n$  des eindimensionalen harmonischen Oszillators im stationären Zustand?
- (c) Können die Übergänge  ${}^3P_2 \rightarrow {}^3P_0$  und  ${}^8S_{7/2} \rightarrow {}^6P_{7/2}$  stattfinden? Begründung!

## Lösung:

- (a) Bosonen haben ganzzahligen Spin, Fermionen halbzahligen.
- (b)  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .
- (c) Der Übergang  ${}^3P_2 \rightarrow {}^3P_0$  ist wegen  $\Delta J = 2$  verboten. Der Übergang  ${}^8S_{7/2} \rightarrow {}^6P_{7/2}$  ist wegen  $\Delta S \neq 0$  verboten.

## 2 Potentialmulde

Gegeben ist eine rechteckförmige Potentialmulde der Breite  $b > 0$  und der Tiefe  $-V_0$  mit  $V_0 > 0$ .

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x < 0 & \text{(Bereich I)} \\ 0 & 0 < x < b & \text{(Bereich II)} \\ 0 & x > b & \text{(Bereich III)} \end{cases} \quad (1)$$

Eine ebene Materiewelle (Energie  $E > 0$ , Masse  $m$ ) trifft von links auf diese Potentialmulde. Der Betrag des Wellenvektors in den drei Bereichen soll mit  $k_I$ ,  $k_{II}$  bzw.  $k_{III}$  bezeichnet werden.

- (a) Die Energie  $E$  des Teilchens sei fest vorgegeben. Berechnen Sie die Muldentiefe  $V_0$  in Abhängigkeit von der Energie  $E$ , so dass gilt  $k_{II} = 4k_I$ .
- (b) Die Muldentiefe erfüllt nun die Bedingungen aus (a) (d. h.  $k_{II} = 4k_I$ ). Geben Sie für alle drei Bereiche die zugehörigen resultierenden Ortswellenfunktionen  $\phi_I(x)$ ,  $\phi_{II}(x)$ ,  $\phi_{III}(x)$  mit allgemeinen Amplitudenkoeffizienten an. **Hinweis:** Verwenden Sie für die ebene Teilchenwelle die komplexe Schreibweise und überlegen Sie, welche Wellenkomponenten in den jeweiligen Bereichen auftreten.

- (d) Betrachten Sie nun zusätzlich den Spezialfall  $\lambda_I = b/2$ , wobei  $\lambda_I$  die Materiewellenlänge im Bereich  $I$  bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $T$ , mit der das Teilchen die Potentialmulde überwindet.

### Lösung:

- (a) Für die Beträge der Wellenvektoren gilt

$$k_I = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} = k_{III}$$

$$k_{II} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}$$

Quadriert man die Bedingung  $k_{II} = 4k_I$ , so ergibt sich  $V_0 = 15E$ .

- (b) In Bereich  $I$  und  $II$  besteht die Ortswellenfunktion  $\phi_{I,II}(x)$  aus einer einfallenden und einer reflektierten Welle. In Bereich  $III$  besteht die Ortswellenfunktion  $\phi_{III}$  nur aus einer transmittierten Welle. Mit der Bedingung aus (a) erhält man somit

$$\phi(x) = \begin{cases} A \exp [ik_I x] + B \exp [-ik_I x] & x < 0 \\ C \exp [4ik_I x] + D \exp [-4ik_I x] & 0 < x < b \\ E \exp [ik_I x] & x > b \end{cases}$$

- (c) Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle  $x = 0$  ergibt sich

$$A + B = C + D$$

$$A - B = 4(C - D)$$

Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle  $x = b$  ergibt sich

$$C \exp [4ik_I b] + D \exp [-4ik_I b] = E \exp [ik_I b]$$

$$4(C \exp [4ik_I b] - D \exp [-4ik_I b]) = E \exp [ik_I b]$$

- (d) Die Transmissionswahrscheinlichkeit  $T$  ist das Betragsquadrat des Amplitudenkoeffizienten  $E$  der transmittierten Ortswellenfunktion  $\phi_{III}$ . Wählt man den Koeffizienten  $A = 1$  und verwendet die Beziehung

$$k_I = \frac{2\pi}{\lambda_I} = \frac{4\pi}{b}$$

so erhält man aus den Gleichungen aus (c)

$$B = C + D + 1$$

$$5C - 3D = 2$$

$$C + D = E$$

$$4(C - D) = E$$

Daraus ergibt sich  $C = 10/16$ ,  $D = 6/16$  und somit  $E = 1$ . Damit erhält man für die Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = |E|^2 = 1$$

Die einfallende Welle wird also vollständig transmittiert. Dies passiert immer wenn die Breite einer Potentialmulde einem Vielfachen der de-Broglie-Wellenlänge entspricht.

### 3 Positronium

Das Positronium ist ein wasserstoffähnliches exotisches Atom, das aus einem  $e^+$  und einem  $e^-$  besteht, die einen kurzlebigen gebundenen Zustand bilden können. Beide Leptonen kreisen im gebundenen Zustand um den gemeinsamen Schwerpunkt, der sich in der Mitte zwischen den beiden befindet.

- (a) Berechnen Sie die klassischen Energieniveaus und die Radien der Bohrschen bahnen des Positroniums als Funktion der Hauptquantenzahl  $n$  und vergleichen Sie diese mit denen des Wasserstoffs.
- (b) Im Positronium koppeln die beiden Spins zum Gesamtspin  $\mathbf{S}$  und dann mit dem Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{F}$ . Im Wasserstoffatom dagegen koppeln  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{l}$  zu  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{j}$  koppelt dann zusammen mit dem Kernspin  $\mathbf{I}$  zu  $\mathbf{F}$ . Trotzdem können wir die Hyperfeinaufspaltung der Energiezustände des Positroniums aus dem für das Wasserstoffatom hergeleiteten Ausdruck berechnen. Warum?
- (c) Welche spektroskopischen Niveaus des Positroniums gibt es für  $n = 1$  und  $n = 2$ ? Verwenden Sie der Einfachheit halber immer  $n_2 = 1$ .

- (d) Die Energieabstände zwischen welchen spektroskopischen Niveaus berechnet man, wenn man die Hyperfeinstrukturaufspaltung des Positroniums bestimmt, d.h. welche Niveaus werden durch die Hyperfeinwechselwirkung im Positronium aufgespalten?
- (e) Berechnen Sie nun die Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands im Wasserstoff und die entsprechende Hyperfeinaufspaltung des Positroniums. Um welche Größenordnung unterscheiden sich die beiden? **Hinweis:** Im Grundzustand ist  $\Delta H_{HFS}^H = \frac{2}{3} g_s g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{m_e m_k n^3} \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{2}$ .

## Lösung:

- (a) Reduzierte Masse des Positroniums:

$$\mu = \frac{m_{e^+} m_{e^-}}{m_{e^+} + m_{e^-}} = \frac{1}{2} m_e$$

Damit sind die Energiezustände:

$$E_n^{e^+e^-} = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{8h^2 \epsilon_0^2 n^2} = \frac{1}{2} E_n^H$$

und für den Bohrschen Radius

$$r_n^{e^+e^-} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{Z e^2} \frac{n^2}{\mu} = 2r_n^H$$

- (b) Die Definition des Gesamtdrehimpulses für Wasserstoff ist

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{j} + \mathbf{I} = \mathbf{l} + \mathbf{s} + \mathbf{I}$$

Betrachtet man das Positronium in einem Bezugssystem in dem das Positron ruht, dann gilt  $\mathbf{L} = \mathbf{l}$  und  $\mathbf{I} = \mathbf{s}_{e^-}$ . Folglich ist

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{l} + \mathbf{s}\mathbf{I} = \mathbf{L} + \mathbf{s}_{e^-} + \mathbf{s}_{e^+} = \mathbf{F}_{e^+e^-}$$

also sind die beiden Definitionen von  $\mathbf{F}$  identisch. Setzt man nun noch  $g_I \rightarrow g_s = 2$ ,  $m_k \rightarrow m_e$  und  $\mu \rightarrow \frac{m_e}{2}$  wie oben berechnet, dann lässt sich die HFS-Aufspaltung im Positronium analog zum Wasserstoff berechnen.

- (c) Die Spins des Elektrons und des Positrons können antiparallel ausgerichtet sein (also  $S = 0$ , dann gibt es die folgenden Zustände.

$$1^1S_0(n_1 = n_2, l_1 = l_2 = 0, m_{l,1} = m_{l,2} = 0)$$

$$2^1S_0(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = l_2 = 0, m_{l,1} = m_{l,2} = 0)$$

$$2^1P_1(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = 0, l_2 = 0, m_{l,1} = 0, \pm 1, m_{l,2} = 0)$$

Sind die Spins von Elektron und Positron parallel ausgerichtet, dann ist  $S = 1$  und man erhält die folgenden Zustände:

$$1^3S_1(n_1 = n_2, l_1 = l_2 = 0, m_{l,1} = m_{l,2} = 0)$$

$$2^3S_1(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = l_2 = 0, m_{l,1} = m_{l,2} = 0)$$

$$2^3P_0(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = 1, l_2 = 0, m_{l,1} = -1, m_{l,2} = 0)$$

$$2^3P_1(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = 1, l_2 = 0, m_{l,1} = 0, m_{l,2} = 0)$$

$$2^3P_2(n_1 = 2, n_2 = 1, l_1 = 1, l_2 = 0, m_{l,1} = 1, m_{l,2} = 0)$$

- (d) Die HFS-Aufspaltung im Wasserstoff ergibt sich aus der parallelen bzw. antiparallelen Ausrichtung von  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{I}$ . Dies entspricht im Positronium der parallelen bzw. antiparallelen Ausrichtung von  $\mathbf{s}_{e^-}$  und  $\mathbf{s}_{e^+}$ , d.h. die Hyperfeinwechselwirkung bewirkt im Positronium eine energetische Aufspaltung zwischen Zuständen mit gleichen räumlichen Quantenzahlen und Spinunterschied  $\Delta S = 1$ .
- (e) Mit der in der Angabe gegebenen Formel für die Hyperfeinverschiebung des Wasserstoffgrundzustands kann man sofort mit  $n = 1$ ,  $j = I = 1/2$ ,  $g_I = 5.58$ ,  $\alpha = 1/137$ ,  $\mu \approx m_e$  und  $m_K = 1836.5m_e$  die Hyperfeinaufspaltung berechnen:

$$\Delta E_{HFS} = 5.87 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Für die Aufspaltung des untersten Positronium-Hyperfeinniveaus, was der Energiedifferenz zwischen  $1^1S_0$  und  $1^3S_1$  entspricht, verwendet man die Formel wie oben mit den Ersetzungen  $g_I \rightarrow g_s = 2$ ,  $m_K \rightarrow m_e$  und  $\mu \rightarrow m_e/2$ ; weiterhin muss  $n = 1$ ,  $j = I = 1/2$  verwendet werden. Dann entspricht  $\Delta E_{HFS}^H|_{F=1}$  der Verschiebung von  $1^3S_1$  und  $\Delta E_{HFS}^H|_{F=0}$  der Verschiebung von  $1^1S_0$ . Man erhält also

$$\Delta E_{HFS}^{e^+e^-} = \Delta E_{HFS}^{e^+e^-}|_{F=1} - \Delta E_{HFS}^{e^+e^-}|_{F=0} = \frac{1}{3}\alpha^4 m_e c^2 = 4.83 \cdot 10^{-4}$$

Die HFS des Wasserstoffs und des Positroniums unterscheiden sich um zwei Größenordnungen. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung im Positronium ist damit von der gleichen Größenordnung wie die Feinstruktur.

## 4 Lithiummoleküle

Lithium kommt als zwei Isotope vor,  ${}^6\text{Li}$  und  ${}^7\text{Li}$ , mit jeweils 3 Protonen und 3 bzw. 4 Neutronen. Der Gleichgewichtsabstand  $r_0$  in den Molekülen  $\text{H}^6\text{Li}$  und  $\text{H}^7\text{Li}$  sei gleich groß. Die Frequenz  $\nu$  entspricht dem Übergang zwischen den Rotationszuständen  $j = 1$  und  $j = 0$ . Experimentell wird zwischen den beiden Molekülsorten ein Frequenzunterschied  $\Delta\nu = \nu(\text{H}^6\text{Li}) - \nu(\text{H}^7\text{Li}) = 10^{10}$  Hz beobachtet. Die Moleküle sollen als starre Rotatoren betrachtet werden.

- (a) Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand  $r_0$ .
- (b) Berechnen Sie für beide Molekülsorten die Energie des Übergangs von  $j = 1$  nach  $j = 0$ .

### Lösung:

- (a) Die Energie  $E_j$  eines Rotationsniveaus mit der Drehimpulsquantenzahl  $j$  berechnet sich mit

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1)$$

mit dem Trägheitsmoment  $I$  des Moleküls:

$$I = \mu r_0^2 = \frac{m_{\text{H}}m_{\text{Li}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Li}}}r_0^2$$

Die Frequenz des Übergangs zwischen den Niveaus mit den Quantenzahlen  $j = 0$  und  $j = 1$  beträgt somit

$$h\nu_{1 \rightarrow 0} = \Delta E_{1 \rightarrow 0} = E(j=1) - E(j=0) = \frac{\hbar^2}{I} \rightarrow \nu_{1 \rightarrow 0} = \frac{\hbar^2}{hI} = \frac{\hbar}{2\pi I}$$

Aus dem Frequenzunterschied zwischen Molekülen  $\text{H}^6\text{Li}$  und  $\text{H}^7\text{Li}$  kann der Gleichgewichtsabstand  $r_0$  berechnet werden:

$$\Delta\nu = \nu_6 - \nu_7 = \frac{\hbar}{2\pi r_0^2} \left( \frac{1}{\mu_6 - \frac{1}{\mu_7}} \right) \rightarrow r_0^2 = \frac{\hbar}{2\pi\Delta\nu} \left( \frac{1}{\mu_6 - \frac{1}{\mu_7}} \right)$$

$$r_0 = 1.55 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- (b) Einsetzen in

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1)$$

liefert

$$E_6 = 2.02 \text{ meV}$$

$$E_7 = 1.98 \text{ eV}$$

## 5 Zeeman-Effekt

- Erläutern Sie das Zustandekommen des normalen Zeeman-Effekts. In welchen Fällen reduziert sich der anomale auf den normalen Zeeman-Effekt und worin liegen deren Unterschiede?
- Welche guten Quantenzahlen sind zusätzlich zur Hauptquantenzahl  $n$  und zur Spinquantenzahl  $s$  notwendig zur vollständigen Beschreibung der Zustände beim anomalen Zeeman-Effekt?
- Betrachten Sie zwei angeregte Zustände in Natrium  $Z = 11$  mit den spektroskopischen Symbolen  $3^2D_{3/2}$  und  $3^2P_{1/2}$ . Für die Energieniveaus gilt  $E(3^2D_{3/2}) > E(3^2P_{1/2})$ . Es wird nun ein schwaches Magnetfeld angelegt. Zeichnen Sie das Termschema für die beiden Zustände. Zeichnen Sie die erlaubten Zeeman-Übergänge ein unter Berücksichtigung der Auswahlregeln:  $\Delta j = 0, \pm 1$ ,  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m_j = 0, \pm 1$ .

### Lösung:

- Die Bewegung des Elektrons um den Kern erzeugt einen Kreisstrom. Dieser bedingt ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$ , das proportional zum Drehimpuls des Elektrons ist. In einem externen Magnetfeld  $B$  besitzt das Elektron zusätzlich zur Coulomb-Energie die potentielle Energie  $E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . Die Zustände spalten in  $2l + 1$  Zustände unterschiedlicher Energie auf.  
Der Landé-Faktor ist abhängig von den Quantenzahlen des jeweiligen Zustands und die Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt also unterschiedlich stark für verschiedene Zustände. Beim normalen Zeeman-Effekt ist die Aufspaltung immer gleich groß. Wenn sich der Gesamtspin  $S = \sum s_i$  zu Null addiert tritt lediglich der normale Zeeman-Effekt zu Tage.
- Anomaler Zeeman-Effekt:  $l, j, m_j$
- Siehe Abbildung.

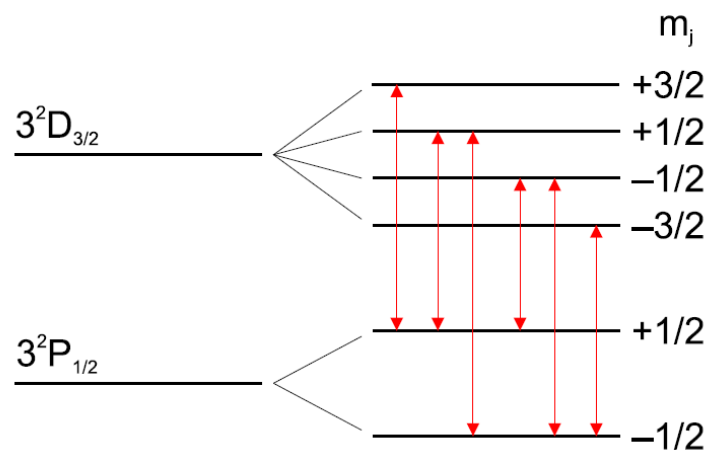


Abbildung 1

## 6 Beheizbares Zimmer

Gegeben sei ein beheizbares Zimmer mit dem Volumen  $V = 75 \text{ m}^3$  und der Anfangstemperatur  $T_i = 287 \text{ K}$ . Die Heizung werde nun aufgedreht bis die Endtemperatur  $T_f = 293 \text{ K}$  erreicht ist. Betrachten Sie Luft näherungsweise als reinen Sauerstoff und diesen als ideales Gas. Der Luftdruck soll  $1013 \text{ hPa}$  betragen und sich durch das Heizen nicht verändern.

- Wie groß ist die in der Zimmerluft anfänglich enthaltene Energie?
- Wie groß ist die Energie der Zimmerluft nach Beendigung des Heizvorgangs?
- Welche Wärmeenergie hat die Heizung abgegeben?

### Lösung:

- Für ein 2-atomiges ideales Gas gilt in diesem Temperaturregime  $U = 5/2nRT$ . Mit idealer Gasgleichung wird dies zu

$$U = \frac{5}{2}pV = 19.0 \text{ MJ}$$

- Druck und Volumen bleiben konstant, daher

$$\Delta U = 0$$



(c) Stoffmenge ändert sich. Mit  $nT = n_0T_0$  ergibt sich

$$\Delta Q = \int_{T_i}^{T_f} \delta Q = \int_{T_i}^{T_f} dT \frac{7}{2} R \frac{n_0 T_0}{T} = \frac{7}{2} n_0 R T_0 \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$n_0 = \frac{pV}{RT_0}, \quad \Delta Q = \frac{7}{2} pV \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) = 550 \text{ kJ}$$

## 7 Silvester

Zu Silvester haben Sie eine unbekannte Menge Blei auf einem Löffel zum Schmelzen gebracht. Die Temperatur des Bleis beträgt 673 K, die Schmelztemperatur des Bleis beträgt 700 K Sie gießen das Blei in ein Wassergefäß mit 250 g Wasser (spezifische Wärmekapazität 4.2 kJ/(kgK)), das seine Temperatur von 293 K auf 294.5 K erhöht. Die spezifische Wärmekapazität von Blei (unabhängig vom Aggregatzustand) beträgt 0.13kJ/(kgK, die spezifische Schmelzwärme ist 25kJ/(kg. Vernachlässigen Sie sämtliche Wärmeverluste an die Umgebung.

- (a) Welche Wärmemenge hat das Wasser aufgenommen? (Ersatzlösung: 1500 J)
- (b) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, welche Prozesse nach dem Hereinfließen des flüssigen Bleis in das Wasser ablaufen.
- (c) Welche Masse Blei ist in das Wassergefäß gegeben worden?

## 8 Lösung:

(a) Hier ist

$$\Delta Q_{H20} = c_{H20} m_{H20} \Delta T = 1575 \text{ J}$$

(b) Flüssiges Blei kühlt auf 700 K ab, Blei erstarrt, festes Blei kühlt auf 294.5 ab.

(c) Die vom Blei abgegebene Wärme ist

$$\Delta Q_{Pb} = m_{Pb} (c_{Pb} \cdot 73 \text{ K} + \Lambda_{Pb} \cdot 305.5 \text{ K})$$

$$\Delta Q_{H20} = \Delta Q_{Pb} \rightarrow m_{Pb} = 21.2 \text{ g}$$