

# FK Ex 4 - 07/09/2015

## 1 Quickies

- (a) Warum spielen die Welleneigenschaften bei einem fahrenden PKW ( $m = 1t$ ,  $v = 100\text{km/h}$ ) keine Rolle?
- (b) Wie groß ist die Energie von Lichtquanten mit einer Wellenlänge von  $\lambda_1 = 500\mu\text{m}$ ,  $\lambda_2 = 500\text{nm}$  und  $\lambda_3 = 0.5\text{nm}$ ?
- (c) Kann man den Aufenthaltsort eines quantenmechanischen Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt vorherbestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Welche physikalische Bedeutung besitzt die Normierung der Schrödingergleichung?
- (e) Welche physikalischen Phänomene kennen Sie, die nicht klassisch aber quantenmechanisch erklärt werden können?
- (f) Woraus folgt das Pauli-Verbot?
- (g) Geben Sie die Zeitentwicklung eines stationären Zustandes an.
- (h) Nennen Sie mindestens zwei Gründe, warum stationäre Zustände in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen.
- (i) Was versteht man unter entarteten Energieniveaus?

## 2 Welle-Teilchen-Dualismus

- (a) Betrachten Sie einen Körper der Masse  $5\text{g}$  mit einer Geschwindigkeit  $v = 100\text{m/s}$ . Welche Breite müsste ein Spalt haben um Beugungsmuster zu beobachten? Ist dies physikalisch realisierbar?
- (b) Ein Neutron werde an einem Atomkern der Größe  $9 \cdot 10^{-15}\text{m}$  gestreut. Welche Energie besitzt das Neutron?

### 3 Bragg-Winkel

Ein Strahl langsamer Neutronen ( $E_{kin} = 2\text{eV}$ ) fällt auf einen Kristall mit Gitterabstand  $d = 1.6 \cdot 10^{-10}\text{m}$ . Bestimmen Sie den Bragg-Winkel für das Intensitätsmaximum 1. Ordnung.

### 4 Unschärferelation

- (a) Angenommen der Impuls eines Teilchens wird mit der Genauigkeit 1 : 1000 gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5g mit der Geschwindigkeit 2m/s handelt? Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron der Geschwindigkeit  $10^4\text{km/s}$  handelt?
- (b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer  $10^{-8}\text{s}$  befindet?

### 5 Wellenpaket

- (a) Betrachten Sie ein Elektron mit dem Impuls  $p = \hbar k$  in  $x$ -Richtung. Wie lautet die zugehörige Wellenfunktion  $\psi(x, t)$ ?
- (b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwelle aus (a), indem Sie eine Stelle fester Phase im Laufe der Zeit durch den Raum verfolgen. Wie verhält sich die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  der Welle zur Geschwindigkeit  $v_T = p/m$  des Elektrons?

### 6 Quantenmechanische Wellenfunktion

Betrachten Sie die quantenmechanische Wellenfunktion

$$\psi(x) = N \cdot \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right], \quad a > 0 \tag{1}$$

- (a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor  $N$  mit der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi|^2 = 1 \tag{2}$$

Welche Einheit hat die Wellenfunktion und warum ist die Normierung wichtig für die Interpretation in der Quantenmechanik?

- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort  $x = 0$  zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall  $[0, dx]$  zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall  $[0, a]$  zu finden?

## 7 Potentialkasten

Gegeben sei ein eindimensionales Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < x < a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

in dem sich ein kräftefreies Teilchen befinde.

- Bestimmen Sie die Wellenfunktion  $\psi_n$ .
- Berechnen Sie die Energieeigenwerte  $E_n$ .
- Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes  $x$  und des Impulsoperators  $\hat{p}$ .
- Berechnen Sie die Energieunschärfe  $\Delta\hat{H}$  und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Hinweis:** Für die Energieunschärfe gilt:

$$\Delta\hat{H} = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2}$$

## 8 Potentialbarriere

Betrachten Sie die abgebildete stückweise konstante Potentiallandschaft in Abbildung 1. Ein von rechts einlaufendes Teilchen habe die Masse  $m$  und die Energie  $E$  mit  $0 < E < V_0$ .

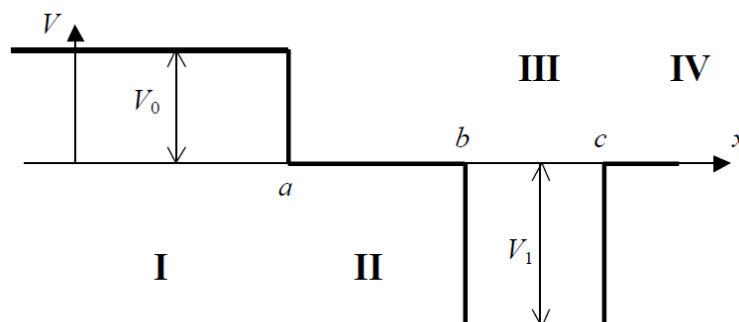


Abbildung 1

- (a) Geben Sie die Ansätze für die Wellenfunktionen für die verschiedenen Regionen I-IV an und verwenden Sie dabei  $\hbar$ ,  $m$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  und  $E$ . Die Schrödingergleichung muss nicht gelöst werden.
- (b) Stellen Sie die Anschlussbedingung für  $x = c$  auf.
- (c) Unter der Annahme, dass in Bereich III gebundene Zustände existieren, stellen Sie wie in Aufgabe (a) die Lösungen für die vier Regionen auf.

## 9 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

- (a) Gegeben sei nun die Wellenfunktion

$$\psi_\lambda(x) = A \exp[-\lambda x^2]$$

Berechnen Sie hiermit den Erwartungswert des Hamiltonoperators. Verwenden Sie

$$\int dx \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp[-ax^2] = 1$$

Betrachten Sie nun ein Teilchen, auf das die Kraft  $K = -kx + k_0$  mit  $k = m_0\omega^2$  wirkt.

- (b) Stellen Sie die dazugehörige Schrödingergleichung auf. Zeigen Sie, dass es sich um einen harmonischen Oszillator handelt.
- (c) Geben Sie die Energieeigenwerte des Teilchens an.

## 10 Kommutatorrelation

Der Drehimpulsoperator ist

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

- (a)  $[L_y, L_z]$
- (b)  $[\mathbf{L}^2, L_z]$

## 11 Bohrsches Atommodell I

Berechnen Sie nach dem Bohrschen Atommodell die Energieniveaus für ein Elektron eines  $Li^{2+}$ -Ions in Zuständen mit  $n = 1, 2$ . Die Kernbewegung sei hierbei vernachlässigbar.

## 12 Bohrsches Atommodell II

Berechnen Sie die Frequenz der Strahlung, die beim Übergang zwischen Niveaus mit Hauptquantenzahlen  $n$  und  $n - 1$  emittiert wird. Interpretieren Sie, was aus dem Ergebnis für  $n \rightarrow \infty$  folgt.

## 13 Myon-Atom

Ein Myon-Atom besteht aus einem Atomkern der Kernladungszahl  $Z$  und einem eingefangenen Myon, das sich im Grundzustand befindet. Myonen sind Elementarteilchen mit  $m_\mu = 207m_e$ ,  $q = -e$  und einer Lebensdauer von  $\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}s$ .

- (a) Berechnen Sie die Bindungsenergie eines Myons, das von einem Proton eingefangen wird.
- (b) Berechnen Sie den Radius der Bohrschen Bahn mit  $n = 1$ .
- (c) Wie groß ist die Energie des Photons, das ausgestrahlt wird, wenn ein Myon vom Zustand  $n = 2$  in den Grundzustand übergeht?