# Ferienkurs Experimentalphysik 2

Sommersemester 2015

Gabriele Semino, Alexander Wolf, Thomas Maier

## Lösungsblatt 4

Elektromagnetische Wellen und spezielle Relativitätstheorie

### Aufgabe 1: Leistung eines Herzschen Dipols

In Kugelkoordinaten stellt die sphärische Welle

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{\alpha}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{\beta}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\phi \tag{1}$$

mit $\alpha = \beta c$ das Fernfeld eines Hertzschen Dipols dar. Berechnen Sie die mittlere Leistung, die von diesem Dipol durch die Halbsphäre $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ mit $r = 1$ km gestrahlt wird, wenn $\alpha$ den Wert 100 V hat. Die elektrische Feldkonstante ist $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/Jm}$.

**Hinweis:** $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin^3\theta = 2/3$

### Lösung

Die momentane Strahlungsintensität an einem bestimmten Ort ist durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \tag{2}$$

gegeben. Im vorliegenden Fall sieht er wie folgt aus:

$$\vec{S}(t,\vec{r}) = \epsilon_0 c^2 \frac{\alpha\beta}{r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{e}_r = \epsilon_0 c \frac{\alpha^2}{r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{e}_r \tag{3}$$

Er zeigt also in radialer Richtung vom Ursprung weg und sein Betrag oszilliert zwischen 0 und dem ortsabhängigen Maximalwert $\epsilon_0 c \frac{\alpha^2}{r^2}\sin^2\theta$. Die momentane Strahlungsleistung durch die Halbsphäre ist das Oberflächenintegral

$$P = \int_{HS} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{S} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\; r^2 \sin\theta\; \vec{e}_r \cdot \vec{S}. \tag{4}$$

Man erhält:

$$P(t) = 2\pi\epsilon_0 c\alpha^2 \cos^2(\omega t - kr) \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\; \sin^3\theta = \frac{4\pi}{3}\epsilon_0 c\alpha^2\cos^2(\omega t - kr)\,. \tag{5}$$

Dies ist die momentane Strahlungsleistung zur Zeit t durch die Halbsphäre mit Radius r. Das zeitliche Mittel davon ist

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\; P(t)\,, \tag{6}$$

also im Wesentlichen durch das Zeitmittel des $\cos^2$-Terms gegeben, welches bekanntlich den Wert 1/2 besitzt. Man erhält also

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3}\epsilon_0 c\alpha^2, \tag{7}$$

unabhängig von $r$. Als Zahlenwert ergibt sich dann

$$\bar{P} = 55,6 \text{ W}. \tag{8}$$

## Aufgabe 2: Polarisation elektromagnetischer Wellen

Beschreiben Sie die Art der Polarisation für die ebenen elektromagnetischen Wellen, die durch die folgenden Gleichungen für das E-Feld beschrieben werden:

a) $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$, $\quad E_z = 4E_0 \sin(kx - \omega t)$

b) $E_y = -E_0 \cos(kx + \omega t)$, $\quad E_z = E_0 \sin(kx + \omega t)$

c) $E_y = 2E_0 \cos(kx - \omega t + \pi/2)$, $\quad E_z = -2E_0 \sin(kx - \omega t)$

## Lösung

Für $x = 0$ ist die Art der Polarisation leicht zu erkennen:

a) $E_y = -E_0 \sin(\omega t)$, $\quad E_z = -4E_0 \sin(\omega t)$

b) $E_y = -E_0 \cos(\omega t)$, $\quad E_z = E_0 \sin(\omega t)$

c) $E_y = 2E_0 \sin(\omega t)$, $\quad E_z = 2E_0 \sin(\omega t)$

Dann kann das E-Feld als eine Funktion der Zeit skizziert werden und die Polarisation einfach abgelesen werden:

a) linear

b) zirkular

c) linear

## Aufgabe 3: Supernovaexplosion

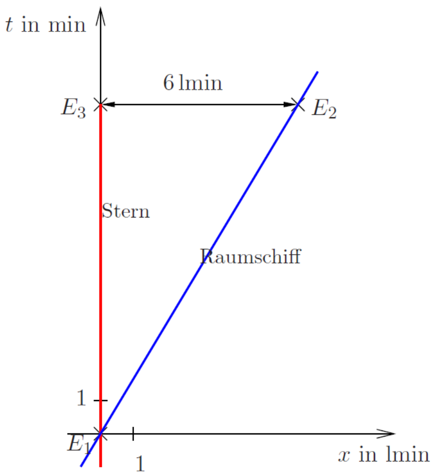
Ein Raumschiff fliegt mit 60% der Lichtgeschwindigkeit an einem Stern vorbei. Nachdem das Raumschiff den Stern passiert und sich (vom Intertialsystem des Sterns betrachtet) 6 Lichtminuten entfernt hat, bricht eine Supernovaexplosion aus.

a) Zeichnen und beschriften Sie ein Minkowski-Diagramm, das die Situation bezüglich des Inertialsystems des Sterns darstellt. Im Nullpunkt des Diagramms soll sich dabei das Ereignis 'Das Raumschiff passiert den Stern' befinden.

b) Welche Koordinaten hat die Supernovaexplosion im Inertialsystem des Sterns?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation, welche Zeit auf der Raumschiffsuhr zwischen dem Vorbeiflug am Stern und dessen Explosion verstreicht.

d) In welcher Entfernung ereignet sich die Supernova vom Raumschiff aus betrachtet?




## Lösung

a)
- $E_1$: 'Das Raumschiff passiert den Stern'
- $E_2$: 'Das Raumschiff ist (im Inertialsystem des Sterns) 6 lmin vom Stern entfernt'
- $E_3$: 'Die Supernova bricht aus'

b) Die Ortskoordinate von $E_3$ im Inertialsystem des Sterns ist

$$x_3 = 0 \tag{9}$$

$E_3$ ist laut Angabe im Inertialsystem des Sterns gleichzeitig mit $E_2$. Da sich das Raumschiff mit $v = 0.6c$ bewegt, ist die Zeitkoordinate von $E_2$

$$t_2 = \frac{x_2}{v} = \frac{6 \text{ lmin}}{0,6c} = 10 \text{ min} \tag{10}$$

also

$$t_3 = 10 \text{ min} \tag{11}$$

c) Gefragt ist nach der Zeitkoordinate von $E_3$ bezüglich dem bewegten System des Raumschiffs. Die Lorentz-Transformation

$$t'_3 = \gamma \left( t_3 - \frac{v}{c^2} x_3 \right) \tag{12}$$

liefert mit den Koordinaten aus b):

$$t'_3 = 12,5 \text{ min} \tag{13}$$

d) Gefragt ist nach der Ortskoordinate von $E_3$ bezüglich dem bewegten System des Raumschiffs. Die Lorentz-Transformation

$$x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) = \gamma \left( x_3 - \frac{v}{c} ct_3 \right) \tag{14}$$

liefert mit den Koordinaten aus b)

$$x'_3 = -7.5 \text{ lmin} \tag{15}$$

Die Entfernung ist also $|x'_3| = 7,5$ lmin.

## Aufgabe 4: Bewegte Teilchen

In einem Raumschiff, dass sich mit $\frac{5}{13}c$ von der Erde weg bewegt werden verschiedene Experimente durchgeführt. In einem ersten Experiment wird der Zerfall eines $\pi^+$-Mesons untersucht. Ein ruhendes $\pi^+$-Meson zerfällt innerhalb von $2,5 \cdot 10^{-8}$ s in ein $\mu^+$-Meson und ein Neutrino. Die kinetische Energie des $\pi^+$-Mesons sei gleich 2/3 seiner Ruheenergie.

a) Geben Sie die Geschwindigkeit des $\pi^+$-Mesongs bezüglich des Raumschiffs an.

b) Berechnen Sie die Strecke, welche das Meson im Raumschiff zurücklegt, bevor es zerfällt.

In einem zweiten Experiment werden in einem elektrischen Feld Elektronen (Ruheenergie $E_0 =$ 511keV) aus der Ruhe auf $v' = \frac{5}{13}c$ relativ zum Raumschiff entgegen der Flugrichtung beschleunigt.

c) Berechnen Sie die Spannung, welche zum Beschleunigen der Elektronen notwendig ist.

## Lösung

a) Gesamtenergie des $\pi^+$-Mesons:

$$E = E_0 + E_{kin} = \left(1 + \frac{2}{3}\right) E_0 = \frac{5}{3}E_0 \tag{16}$$

Vergleich mit der relativistischen Energie:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma E_0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{5}{3} \tag{17}$$

Berechnung von $v$ aus $\gamma$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{4}{5}c \tag{18}$$

b) Ein ruhendes Meson hat eine Lebenszeit von $T = 2,5 \cdot 10^{-8}$ s. Bewegt sich dieses jedoch mit der oben berechneten Geschwindigkeit von $v = \frac{4}{5}c$ bezüglich des Raumschiffes, so ist seine Lebenszeit für einen im Bezugsystem des Raumschiffes ruhenden Beobachter um einen Faktor $\gamma = \frac{5}{3}$ länger.

$$T_R = \gamma T = 4,17 \cdot 10^{-8}\text{s} \tag{19}$$

Die zurückgelegte Strecke ist also:

$$x_R = v \cdot T_R = \frac{4}{5}c \cdot \frac{5}{3}T = 10\text{m} \tag{20}$$

c) Gesamtenergie eines Elektrons:

$$E = E_0 + E_{kin} = E_0 + eU = \gamma E_0 \qquad \Rightarrow \qquad U = \frac{\gamma - 1}{e}E_0 \tag{21}$$

Berechnung von $\gamma$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{13}{12} \tag{22}$$

Berechnung von $U$:

$$U = \frac{\gamma - 1}{e}E_0 = 42,6\text{kV} \tag{23}$$

## Aufgabe 5: Nachricht an bewegtes Raumschiff

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von der Erde (Ursprung des Bezugssystems $S$) ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1\mathrm{d}$ eine Nachricht an das Schiff.

a) Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff im System $S$ den Ort

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{24}$$

erreicht und es ist die Zeit

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{25}$$

auf der Erde vergangen.

b) Bestimmen sie die Ankunftszeit des Funkspruchs, die von einer Uhr an Board des Schiffs gemessen wird.

## Lösung

a) Im System $S$ hat das Raumschiff den Ort

$$x_R = vt \tag{26}$$

Der Funkspruch hat dagegen den Ort (natürlich nur für $t > \tau$):

$$x_F = c(t - \tau) \tag{27}$$

Damit der Funkspruch das Schiff erreicht, muss $x_R = x_F$ gelten. Gleichsetzen der beiden Ausdrücken und auflösen nach $t$ liefert:

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{5}{2}\mathrm{d} \tag{28}$$

Einsetzen in der ersten Gleichung liefert:

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3,888 \cdot 10^{13}\mathrm{m} \tag{29}$$

b) Die Ankunftszeit $t'$ ist gemäß der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) && (30)\\
&= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2\tau}{c^2(1 - \frac{v}{c})}\right) && (31)\\
&= \gamma\tau\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} && (32)\\
&= \gamma\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = 2\tau = 2\mathrm{d} && (33)
\end{aligned}$$

## Aufgabe 6: Erde, Rakete, Meteor

Die Erde, eine bemannte Rakete und ein Meteor bewegen sich zufallig in die gleiche Richtung. An der Erde fliegt die Rakete mit einer von der Erde beobachteten Geschwindigkeit von $v_{E,R} = \frac{3}{4}c$ vorbei. An der Rakete fliegt der Meteor mit einer von der Raketenmannschaft beobachteten Geschwindigkeit von $v_{R,M} = \frac{1}{2}c$ vorbei.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Meteor von der Erde aus beobachtet?

b) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für diese Situation aus der Sicht der Raketenbesatzung.

## Lösung

a) Die Geschwindigkeiten $v_{E,R}$ und $v_{R,M}$ müssen (relativistisch) addiert werden, da die jeweiligen Beobachter positive Geschwindigkeiten sehen, also

$$v_{E,M} = \frac{v_{E,R} + v_{R,M}}{1 + \frac{v_{E,R} v_{R,M}}{c^2}} = \frac{10}{11} c \tag{34}$$

b) Die Winkel im Minkowski-Diagramm ergeben sich zu

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{v_{R,M}}{c}\right) = 26{,}6^\circ \text{ und } \alpha_E = \arctan\left(-\frac{v_{E,R}}{c}\right) = -36{,}9^\circ \tag{35}$$

Da $v$ für den Meteor positiv und für die Erde negativ ist, bewegen sich die Achsen auf die Winkelhalbierende zu, bzw. von ihr weg.