Ferienkurs Experimentalphysik 2

Sommersemester 2015

Gabriele Semino, Alexander Wolf, Thomas Maier

Lösungsblatt 2

Elektrischer Strom und Magnetostatik

Aufgabe 1: Kupferrohr

Ein Kupferrohr (Hohlzylinder) mit Innenradius $r_i = 0,4$ cm, Außenradius $r_a = 0,5$ cm und Länge $l = 5$ m wird mit den Enden an eine Spannungsquelle mit $U = 6$ V angeschlossen. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt bei Raumtemperatur etwa $\rho = 1,72 \cdot 10^{-2}\ \frac{\Omega \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$.

a) Berechnen Sie die Stromdichte $j = |\vec{j}|$ und den Gesamtstrom I.

b) Berechnen Sie mit dem Ampere'schen Gesetz das Magnetfeld in allen relevanten Bereichen. Verwenden Sie dabei die Idealisierung $l \to \infty$.

Lösung

a) Es gilt für den Widerstand R des Kupferkabels:

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{\pi \left(r_a^2 - r_i^2\right)} = 3,04 \cdot 10^{-3} \Omega \tag{1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{R} = 1,97 \cdot 10^3 \mathrm{A} \tag{2}$$

$$\Rightarrow j = \frac{I}{A} = 6,98 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \tag{3}$$

b) Das Amperesche Gesetz lautet:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \tag{4}$$

Wir wählen als Fläche A eine Kreisfläche mit Radius r. Also erhalten wir für die linke Seite wegen $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$ in allen Fällen

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(r) 2\pi r \tag{5}$$

Für die rechte Seite gilt immer $\vec{j} \parallel d\vec{A}$, jedoch benötigen wir eine Fallunterscheidung:

$r < r_i$:

$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow B(r) = 0 \tag{7}$$

$r_i < r < r_a$:

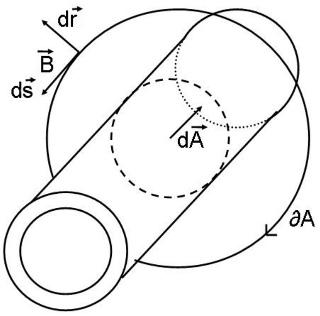
$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = j\pi \left(r^2 - r_i^2\right) \tag{8}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j\pi \left(r^2 - r_i^2\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j}{2} \left(r - \frac{r_i^2}{r}\right) \tag{9}$$

$r_a < r$

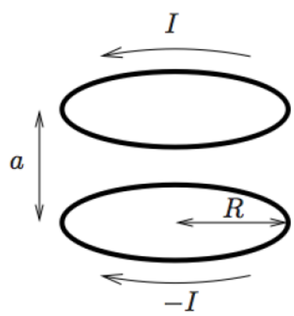
$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I \tag{10}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{11}$$



Aufgabe 2: Helmholtz-Spulen

Gegeben seien zwei koaxiale und parallel kreisförmige Leiterschleifen mit Radius R, die vom gleichen Strom I in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden (siehe Skizze).



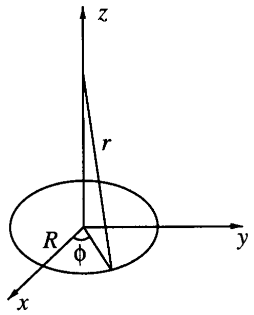
a) Berechnen Sie zunächst mithilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes das Magnetfeld einer einzelnen kreisförmigen Leiterschleife mit Radius R, die von einem Strom I durchflossen wird, auf der z-Achse. Wählen Sie Ihr Kordinatensystem so, dass der Mittelpunkt im Ursprung liegt und die z-Achse parallel zur Flächennormalen verläuft.

b) In welchem Abstand a voneinander müssen die beiden Leiterschleifen positioniert werden, damit das Magnetfeld im Mittelpunkt zwischen den Leiterschleifen einen möglichst konstanten Feldgradienten (in z-Richtung) aufweist?

Hinweis: Betrachten Sie nur die z-Komponente des B-Feldes und entwickeln Sie $B_z(z)$ um den Mittelpunkt der Anordnung. Die nullte und alle geraden Ordnungen verschwinden und die erste Ordnung ist der Feldgradient. Fordern Sie nun, dass die dritte Ordnung verschwinden soll.

Lösung

a) Wir wählen als Parametrisierung:



$$d\vec{s} = R \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \qquad \vec{r} = R \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ \frac{z}{R} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Also lautet das Biot-Savartsche Gesetz:

$$\vec{B}(z) = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{s} \times \vec{r}) \tag{13}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} Rz\cos\phi \\ Rz\sin\phi \\ R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \end{pmatrix} d\phi \tag{14}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R^2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \tag{15}$$

wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \; d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \; d\phi = 0 \tag{16}$$

b) Das Feld einer kreisförmigen Leiterschleife vom Radius R, die in der xy-Ebene liegt und vom Strom I in $\vec{e}_\varphi$-Richtung durchflossen wird, hat auf einem Punkt der z-Achse den Wert (B:=B_z):

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{17}$$

Hat man nun zwei derartige Schleifen 1 und 2, die sich in der $z = \frac{a}{2}$ bzw. $z = -\frac{a}{2}$ Ebene befinden, wobei in der oberen Schleife der Strom I und in der unteren der Strom $-I$ fließt, dann ist das Gesamtfeld also:

$$B(z) = B_1(z) + B_2(z) \tag{18}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\left(R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} - \left(R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \tag{19}$$

Die Taylorentwicklung der Funktion $f(z)$ in den eckigen Klammern um $z = 0$ bis zur dritten Ordnung ergibt:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{1}{2}f''(0)z^2 + \frac{1}{6}f'''(0)z^3 + \ldots \tag{20}$$

$$= 3a\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-5/2} z + \frac{5}{2}a\left(a^2 - 3R^2\right)\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-9/2} z^3 + O(z^5) \tag{21}$$

In der Entwicklung treten keine geraden Potenzen von z auf, da alle geraden Ableitungen von $f(z)$ verschwinden, denn $f(z)$ ist eine ungerade Funktion, d.h. $f(-z) = -f(z)$. Insbesondere ist das Feld im Mittelpunkt Null. Damit nun auch der kubische Term verschwindet, fordert man also:

$$a = \sqrt{3}R \tag{22}$$

Damit ist das Feld also in der Umgebung von $z = 0$ linear bis auf die Terme der Ordnung z^5.

Aufgabe 3: Tetraeder aus Widerständen

Sechs identische Widerstände R werden zu einer tetraedischen Anordnung verlötet, so dass auf jeder Tetraederkante ein Widerstand angebracht ist. Zwischen zwei Ecken (1 und 2) wird eine Spannung U, angelegt, die beiden übrigen Ecken werden mit 3 und 4 bezeichnet.

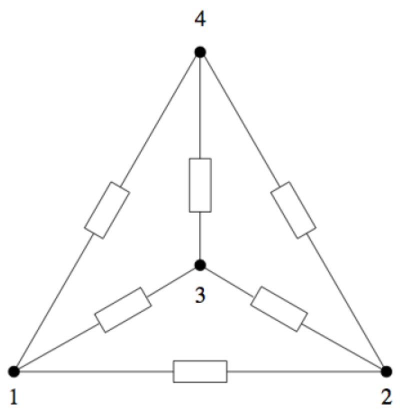
a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand zwischen den Punkten 1 und 2?

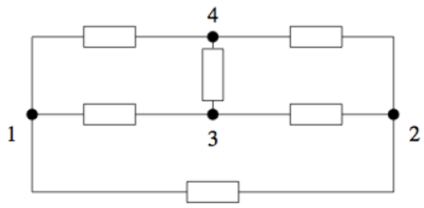
b) Wie groß ist die Spannung zwischen den Tetraederecken 2 und 3?

c) Welcher Strom fließt zwischen 1 und 3, welcher zwischen 3 und 4?

Lösung

Wir erhalten folgende Situation mit Ersatzschaltbild:





a) Aus Symmetriegründen herrscht an Punkten 3 und 4 dasselbe Potential, daher fließt kein Strom durch Widerstand 34. Die Schaltung aus den oberen verbleibenden 4 Widerständen wirkt daher wie eine Parallelschaltung aus je zwei hintereinandergeschalteten Widerständen, d.h. ihr Gesamtwiderstand ist

$$\frac{1}{R_{\text{oben}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \tag{23}$$

$$\Rightarrow R_{\text{oben}} = R \tag{24}$$

Dies ist noch parallelgeschalten mit dem verbleibenden Widerstand. Also erhält man als Gesamtwiderstand:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \tag{25}$$

$$\Rightarrow R_{\text{ges}} = \frac{R}{2} \tag{26}$$

b) Aus Symmetriegründen ist wieder klar, dass zwischen 2 und 3 genauso viel Spannung abfällt wie zwischen 1 und 3. Da die Gesamtspannung U ist, ist die Spannung zwischen 2 und 3 also $\frac{U}{2}$.

c) Zwischen 3 und 4 fließt, wie bereits erwähnt, kein Strom. Da die Schaltung aus den oberen 5 Widerständen denselben Ersatzwiderstand hat wie der verbleibende Widerstand, teilt sich der Strom gleichmäßig auf. Innerhalb der Fünferschaltung teilt sich der Strom aus Symmetriegründen wiederrum gleichmäßig auf, sodass zwischen 1 und 2 und 3 ein Viertel des Gesamtstrom fließt:

$$I_{13} = \frac{1}{4} I_{\text{ges}} = \frac{1}{4} \frac{U}{R/2} = \frac{U}{2R} \tag{27}$$

Aufgabe 4: Dünner Draht

Gegeben sei ein langer dünner Draht mit Längenladungsdichte λ. Im Draht fließe außerdem ein Strom der Stärke I.

a) Zeigen Sie, dass elektrisches und magnetisches Feld des Drahtes gegeben sind durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r \qquad \text{und} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\phi \tag{28}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit v muss ein Teilchen mit Masse m und Ladung q parallel entlang des Drahtes fliegen, damit der Abstand r zwischen Ladung und Draht konstant ist.

Lösung

a) Aufgrund der Symmetrie ist klar, dass $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$. Wir wenden das Gauß'sche Gesetz an, wobei wir als Integrationsvolumen einen Zylinder mit Radius r und Länge l wählen. Wir erhalten:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \; dV \tag{29}$$

$$E(r) 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \tag{30}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{31}$$

Für das Magnetfeld gilt aufgrund der Symmetrie $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$ (vgl. 'Rechte-Hand-Regel'). Wir wenden das Ampere'sche Gesetz an, wobei wir als Integrationsfläche eine Kreisscheibe mit Radius r wählen. Wir erhalten:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \tag{32}$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I \tag{33}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{34}$$

b) Die Gesamtkraft auf eine Punktladung, die sich im Abstand r parallel zum Draht mit der Geschwindigkeit v (O.B.d.A. in z-Richtung) bewegt, ist

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{35}$$

$$= q\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_x + v\vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_y\right) \tag{36}$$

mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$ erhält man als Bedingung für ein Verschwinden der Kraft:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - v\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\frac{\lambda}{I} \tag{38}$$

Aufgabe 5: Elektronen im Magnetfeld

Elektronen (Ladung $q = -e$) bewegen sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in x-Richtung in ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

b) Lösen Sie die Gleichung durch einen Ansatz mit Sinus und Cosinus.

c) Berechnen Sie die Winkelgeschwindikkeit ω_c (Zyklotron-Frequenz), den Kreismittelpunkt $\vec{R}$ sowie den Radius der Kreisbahnen in Abhängigkeit von B, v_0 und dem Anfangsort $\vec{r}(0)$.

d) Zeigen Sie, dass sich der Lösungs-Geschwindigkeitsvektor allgemein durch eine Drehmatrix darstellen lässt, d.h. $\vec{v}(t) = D[\phi(t)]\vec{v}(0)$ mit $\phi(t) = \omega_c t$ und: $D[\phi(t)] = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \end{pmatrix}$.

Lösung

a)

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \tag{39}$$

$$\Rightarrow m\dot{\vec{v}} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{40}$$

mit $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ und $\vec{B} = (0, 0, B)$:

$$\dot{v}_x = -\frac{eB}{m}v_y \tag{41}$$

$$\dot{v}_y = \frac{eB}{m}v_x \tag{42}$$

b) Ansatz:

$$v_x(t) = A_x \sin(\omega_x t) + C_x \cos(\omega_x t) \tag{43}$$

$$v_y(t) = A_y \sin(\omega_y t) + C_y \cos(\omega_y t) \tag{44}$$

$$v_x(0) = v_0 \qquad v_y(0) = 0 \tag{45}$$

Einsetzen:

$$\omega_x \left(A_x \cos(\omega_x t) - C_x \sin(\omega_x t)\right) = -\frac{eB}{m}\left(A_y \sin(\omega_y t) + C_y \cos(\omega_y t)\right) \tag{46}$$

$$\omega_y \left(A_y \cos(\omega_y t) - C_y \sin(\omega_y t)\right) = \frac{eB}{m}\left(A_x \sin(\omega_x t) + C_x \cos(\omega_x t)\right) \tag{47}$$

Damit Lösung für alle t existiert $\Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega$.

Koeffizientenvergleich:

$$\text{I) sin: } -\omega C_x = -\frac{eB}{m}A_y \qquad \Rightarrow C_x = \frac{eB}{m\omega}A_y \tag{48}$$

$$\text{II) cos: } \omega A_y = \frac{eB}{m}C_x \qquad \Rightarrow A_y = \frac{eB}{m\omega}C_x \tag{49}$$

$$\Rightarrow C_x = \left(\frac{eB}{m\omega}\right)^2 C_x \tag{50}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{eB}{m\omega} \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m} =: \omega_c \tag{51}$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{eB}{m}A_y = \frac{eB}{m}C_x \Rightarrow A_y = C_x \tag{52}$$

Startbedingung:

$$v_x(0) = A_x \cdot 0 + C_x \cdot 1 = v_0 \tag{53}$$

$$\Rightarrow C_x = A_y = v_0 \tag{54}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\text{I) cos: } \omega A_x = -\frac{eB}{m}C_y \tag{55}$$

Einsetzen von ω liefert:

$$\frac{eB}{m}A_x = -\frac{eB}{m}C_y \Rightarrow A_x = -C_y \tag{56}$$

Startbedingung:

$$v_y(0) = A_y \cdot 0 + C_y \cdot 1 = 0 \tag{57}$$

$$\Rightarrow C_y = A_x = 0 \tag{58}$$

Als Lösung erhält man schließlich eine Kreisbahn:

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \tag{59}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin(\omega_c t) \tag{60}$$

c) Zyklotronfrequenz w_c:

$$\omega_c = \omega = \frac{eB}{m} \text{ (siehe Aufgabenteil b))} \tag{61}$$

Kreismittelpunkt $\vec{R}$:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + D_x \tag{62}$$

$$y(t) = \int v_y(t)\mathrm{d}t = -\frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + D_y \tag{63}$$

$$\vec{r}(0) = (x_0, y_0) \tag{64}$$

$$\Rightarrow R_x = D_x = 0 + x_0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow R_y = D_y = \frac{v_0}{\omega_c} + y_0 \tag{66}$$

Kreisradius k:

$$k = \sqrt{(x(t) - R_x)^2 + (y(t) - R_y)^2} \tag{67}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \sin^2(\omega_c t) + \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \cos^2(\omega_c t)} \tag{68}$$

$$= \frac{v_0}{\omega_c}\sqrt{\sin^2(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t)} = \frac{v_0}{\omega_c} \tag{69}$$

d)

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_x(0)\cos(\omega_c t) - v_y(0)\sin(\omega_c t) \tag{71}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = v_y(0)\sin(\omega_c t) + v_x(0)\cos(\omega_c t) \tag{72}$$

Analog zum Ansatz aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 6: Magnetisierung Aluminiumspule

Ein Aluminiumstab (Permeabilität von Aluminium: $\mu_{r,Al} = 1+2,2\cdot 10^{-5}$) der Länge $l = 20cm$ wird mit $N = 250$ Drahtwicklungen gleichmäßig umwickelt. Im Draht fließe nun ein Strom $I = 10A$.

a) Ist Aluminium para-/ferro- oder diamagnetisch?

b) Wie groß ist die Magnetisierung M des Aluminiums?

c) Wie hoch ist die magnetische Flussdichte B im Aluminium?

d) Welcher Strom müsste in einer baugleichen Spule mit Eisenkern (Permeabilität von Eisen: $\mu_{r,Fe} \approx 500$) fließen, damit dort die gleiche magnetische Flussdichte herrscht?

Lösung

a) Wegen $\mu_{r,Al} > 1$: paramagnetisch

b)

$$H = \frac{NI}{l} = 12500\frac{A}{m} \tag{73}$$

$$\Rightarrow M = \chi H = (\mu_r - 1)H = 0,25\frac{A}{m} \tag{74}$$

c)

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0\mu_r H = 1,57 \cdot 10^{-2}\frac{Vs}{m^2} \tag{75}$$

d)

$$B_{Al} = B_{Fe} \tag{76}$$

$$\Rightarrow \mu_0\mu_{r,Al}H_{Al} = \mu_0\mu_{r,Fe}H_{Fe} \tag{77}$$

$$\Rightarrow \mu_{r,Al}I_{Al} = \mu_{r,Fe}I_{Fe} \tag{78}$$

$$\Rightarrow I_{Fe} = \frac{\mu_{r,Al}}{\mu_{r,Fe}}I_{Al} = 0,02A \tag{79}$$