# Ferienkurs Experimentalphysik 2

Sommersemester 2015

Gabriele Semino, Alexander Wolf, Thomas Maier

## Lösungsblatt 1
Elektrostatik

### Aufgabe 1: Mondladung

Betrachten Sie Erde und Mond als geladene Kugeln, die beide die gleiche entgegengesetzte Oberflächenladungsdichte haben. Die Größe der Erde (Erdradius $r_\mathrm{E} = 6371$ km, Erdmasse $m_\mathrm{E} = 5,9736 \cdot 10^{24}$ kg) und des Mondes (Mondradius $r_\mathrm{M} = 1773$ km, Mondmasse $m_\mathrm{M} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg) und ihr mittlerer Abstand ($r_{EM} = 384400$ km) seien wie in der Wirklichkeit. Die Ladung der Erde ist positiv, die des Mondes negativ.

a) Wie groß müssen die Gesamtladungen auf der Erde und dem Mond sein, damit die Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern genauso stark ist wie die Gravitation?

b) Könnte man das gesamte Sonnensystem mithilfe geladener Körper und elektrostatischer Kräfte als alleinig auftretende Kräfte nachbauen? Begründen Sie ihre Antwort.

### Lösung

a) Mond und Erde haben die gleiche konstante Oberflächenladungsdichte, also gilt

$$Q_\mathrm{M} = -Q_\mathrm{E}\frac{r_\mathrm{M}^2}{r_\mathrm{E}^2} \tag{1}$$

Die Coulomb-Kraft berechnet sich zu

$$F_\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\mathrm{M}Q_\mathrm{E}}{r_\mathrm{EM}^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{EM}^2}\frac{r_\mathrm{M}^2}{r_\mathrm{E}^2} \tag{2}$$

Die Gravitationskraft berechnet sich zu $F_G = -G\frac{m_\mathrm{M}m_\mathrm{E}}{r_\mathrm{EM}^2}$, wobei $G = 6,674 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}$ die Gravitationskonstante ist. Also erhält man:

$$F_C = F_G \tag{3}$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\mathrm{E}^2}{r_\mathrm{EM}^2}\frac{r_\mathrm{M}^2}{r_\mathrm{E}^2} = -G\frac{m_\mathrm{M}m_\mathrm{E}}{r_\mathrm{EM}^2} \tag{4}$$

Durch Umstellen erhält man

$$Q_\mathrm{E} = 2\frac{r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{M}}\sqrt{Gm_\mathrm{E}m_\mathrm{M}\pi\epsilon_0} = 2,05 \cdot 10^{14}C \tag{5}$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung erhält man

$$Q_\mathrm{M} = -2\frac{r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{E}}\sqrt{Gm_\mathrm{E}m_\mathrm{M}\pi\epsilon_0} = -1,59 \cdot 10^{13}C \tag{6}$$

b) Dies ist nicht möglich. Im Gegensatz zur Coulomb-Wechselwirkung wirkt die Gravitation immer anziehend. Daher wird spätestens beim Hinzufügen des dritten Körpers des Sonnensystems eine Abweichung zum realen Sonnensystem festzustellen sein.

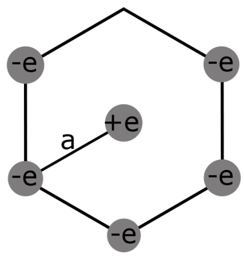
## Aufgabe 2: Ladungen im Sechseck

An fünf Ecken eines gleichseitigen Sechsecks (Seitenlänge $a = 5 \cdot 10^{-5}$ m) sei je ein Elektron ($-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) angebracht, im Zentrum des Sechsecks befinde sich eine positive Punktladung $q = +e$.

a) Welches Potential erzeugt diese Ladungsverteilung in der freien sechsten Ecke? Welche Arbeit muss geleistet werden um ein weiteres Elektron aus der Unendlichkeit in die freie Ecke zu bringen?

b) Wird dieses Elektron anschließend wieder losgelassen, so fliegt es weg. Welche Grenzgeschwindigkeit erreicht das Elektron im Vakuum?

c) Welche Grenzgeschwindigkeit erreichen die Elektronen, wenn alle sechs gleichzeitig losgelassen werden?




## Lösung

Die Entfernung zweier Elektronen wird mit $r_{ij}$ mit $i, j \in \{0, \ldots, 6\}$ mit 0 dem Zentrum und $1, \ldots, 6$ die anderen Elektronen im Uhrzeigersinn nummeriert. Die Entfernungen zum Zentrum sind $r_{0i} = a$, die zu benachbarten Ecken ebenfalls $a$, die zu den übernächsten Ecken $a\sqrt{3}$, die zu gegenüberliegenden $2a$.

a) Die freie Stelle 6 tritt in Wechselwirkung mit dem Zentrum 0 und den fünf Elektronen auf dem Sechseck. Für das Potential an der Stelle 6 gilt

$$\varphi_{6,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{6,i}} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \varphi_6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{5} \frac{q_i}{r_{6,i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left( \frac{e}{1} + \frac{-e}{1} + \frac{-e}{\sqrt{3}} + \frac{-e}{2} + \frac{-e}{\sqrt{3}} + \frac{-e}{1} \right) \tag{8}$$

$$= \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left( -\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \tag{9}$$

Die potenzielle Energie eines aus dem Unendlichen kommenden Elektron ist

$$E_{\text{pot}} = -e\varphi_6 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = 1,22 \cdot 10^{-23} J \tag{10}$$

b) Diese wird in reine kinetische Energie eines Elektrons umgewandelt: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2$. Nach dem Energieerhaltungssatz folgt $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{m_e}} = 5,18 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \tag{11}$$

c) Lässt man alle sechs Elektronen gleichzeitig los, so bedeutet dies, dass alle untereinander in Wechselwirkung treten (da sie nicht festgehalten sind). Die potenzielle Energie, die dieses System nun besitzt, kann man folgendermaßen deuten: Man bringt ein Elektron nach dem anderen aus dem Unendlichen kommend an seinen Platz und berücksichtigt zusätzlich zur Wechselwirkung mit dem Zentrum auch noch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander.

Sechs Wechselwirkungen im Zentrum, sechs mit Nachbarn, sechs mit übernächsten Nachbarn, 3 mit gegenüberliegenden. Daher

$$E^*_{\text{pot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(-6 \cdot \frac{1}{1} + 6 \cdot \frac{1}{1} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{\sqrt{3}}\right) \tag{12}$$

Diese potenzielle Energie wird in kinetische Energie von sechs Elektronen umgewandelt: $E^*_{\text{kin}} = 6 \cdot \frac{1}{2} m_e v^{*2} = 3 m_e v^{*2}$. Nach dem Energieerhaltungssatz folgt

$$E^*_{\text{pot}} = E^*_{\text{kin}} \tag{13}$$

$$\Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{E^*_{\text{pot}}}{3m_e}} = 2,89 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \tag{14}$$

## Aufgabe 3: Satz von Gauß

Bestimmen Sie für die folgenden Anordnungen das elektrische Feld $\vec{E}$ in allen relevanten Gebieten mithilfe des Satzes von Gauß.

a) Für eine homogen geladene Vollkugel mit Volumenladungsdichte $\rho_0$ und Radius $r_0$.

b) Für einen unendlich langen Hohlzylinder mit vernachlässigbarer Wandstärke. Der Radius des Zylinders sei $r_0$, die Wand habe eine Oberflächenladungsdichte $\sigma_0$.

c) Für einen unendlich langen Draht mit Linienladungsdichte $\lambda_0$.

## Lösung

Allgemein lautet der Satz von Gauß

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div}\vec{E}\ dV \tag{15}$$

Für ein belieges Volumen $V$ und ein beliebiges rotationsfreies Vektorfeld $\vec{E}$. Interpretiert man $\vec{E}$ als elektrisches Feld kann das Gauß'sche Satz mithilfe des ersten Maxwellschen Gesetzes $\text{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ geschrieben werden kann als

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\ dV \tag{16}$$

$\epsilon_0$ ist hierbei die Dielektrizitätskonstante und $\rho$ die Volumenladungsdichte. Das Integral auf der rechten Seite entspricht also genau der von dem Volumen $V$ eingeschlossenen Ladung $Q_{\text{IN}}$, daher schreiben wir den Satz final als

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{IN}}}{\epsilon_0} \tag{17}$$

a) Aufgrund der Kugelsymmetrie gilt $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$, daher erhält man als Oberflächenintegral für ein Gauß-Volumen in Form einer Kugel mit Radius $r$:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)\ 4\pi r^2 \tag{18}$$

Wir unterscheiden jetzt 2 Bereiche:

- $r < r_0$:

$$Q_{\text{IN}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4/3\pi r^3 \rho_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \tag{20}$$

- $r_0 < r$:

$$Q_{\text{IN}} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4/3\pi r_0^3 \rho_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{r_0^3}{r^2} \tag{22}$$

b) Aufgrund der Zylindersymmetrie gilt $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\vec{e}_\rho$, wobei $\rho$ die radiale Koordinate der Grundfläche des Zylinders beschreibt. Wir wählen als Gaußvolumen einen Zylinder mit Länge $l$ und Radius $\rho$. Man erhält für das Oberflächenintegral

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Deckflächen}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{=0 \ (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0)} + \int_{\text{Mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{23}$$

$$= E(\rho)\ 2\pi\rho l \tag{24}$$

Wir unterscheiden wieder 2 Bereiche:

- $\rho < r_0$:

$$Q_{\text{IN}} = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow E(\rho) = 0 \tag{26}$$

- $r_0 < \rho$:

$$Q_{\text{IN}} = 2\pi r_0 l \sigma_0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow E(\rho) = \frac{2\pi r_0 l \sigma_0}{2\pi\rho l \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{r_0}{\rho} \tag{28}$$

c) Es gilt wiederrum Zylindersymmetrie mit $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\vec{e}_\rho$. Wir wählen als Gaußvolumen einen Zylinder mit Länge $l$ und Radius $\rho$, also gilt für das Oberflächenintegral:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\rho)\ 2\pi\rho l \tag{29}$$

Als eingeschlossene Ladung erhalten wir für alle $\rho$:

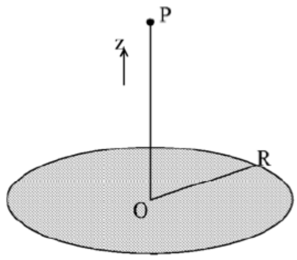
$$Q_{\text{IN}} = \lambda_0 l \tag{30}$$

und damit für das elektrische Feld

$$E(\rho) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho} \tag{31}$$

## Aufgabe 4: E-Feld einer Scheibe

Eine Scheibe mit Radius $R$ hat eine Oberflächenladungsdichte $\sigma$. Die $z$-Achse schneidet den Mittelpunkt $O$. Die Gesamtladung der Schiebe beträgt $Q = \pi R^2 \sigma$.




a) Berechnen Sie die Größe und Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}(z)$ an einem Punkt $P$ in einer Entfernung $z$ über dem Mittelpunkt der Scheibe. Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von $Q$, $R$, $\epsilon_0$ und $z$ aus.

   **Hinweis:** Das Ergebnis für das elektrische Feld entlang der $z$-Achse eines Rings mit Radius $r$ und Ladung $q$ mag hier hilfreich sein:

$$\vec{E}_{\text{Ring}}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z \tag{32}$$

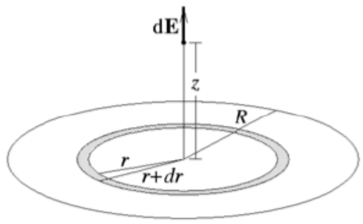
b) Skizzieren Sie $\vec{E}(z)$ qualitativ für $z > 0$.

c) Benutzen Sie die Taylorreihe $(1 + u)^n \approx 1 + nu + \ldots$ für $u \ll 1$ um vereinfachte Ausdrücke für die folgenden zwei Grenzfälle von $\vec{E}(z)$ zu finden: $z^2 \ll R^2$ und $z^2 \gg R^2$.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (c) mit $\vec{E}(r)$ einer Punktladung $Q$ im Ursprung.

## Lösung

a) Wir unterteilen die Scheibe in Ringe: Für diese Ringe ist ihr jeweiliges E-Feld $dE$ bekannt.




   Diese lassen sich dann über den Radius $R$ der Scheibe integrieren.

$$dA = 2\pi r dr \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \tag{33}$$

$$\Rightarrow dq = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} (2\pi r dr) \tag{34}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} \tag{35}$$

   um diesen Ausdruck zu integrieren benutzt man die Substitution

$$s := \sqrt{z^2 + r^2} \Rightarrow r dr = s ds \tag{36}$$

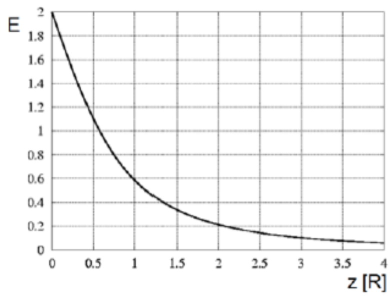
also hat das Integral die Form $\int s^{-2} ds$:

$$E = \int dE = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \tag{37}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ \frac{-1}{(z^2+r^2)^{1/2}} \right]_0^R \tag{38}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \vec{e}_z \qquad (\text{für } z > 0) \tag{39}$$

b) Man erhält den Verlauf:




c) Die Funktion $(1+u)^n$ kann um 0 für $u \ll 1$ wie folgt durch eine Taylorreihe approximiert werden:

$$(1+u)^n \approx 1 + nu + \ldots \tag{40}$$

- $z^2 \ll R^2$:
  Die Gleichung für $\vec{E}(z)$ lässt sich umschreiben als

  $$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}} \right) \vec{e}_z \tag{41}$$

  also gilt

  $$\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2 \tag{42}$$

  damit ergibt sich

  $$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{z}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right) \right) \vec{e}_z \tag{43}$$

  $$\approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z \qquad \text{für } z^2 \ll R^2 \tag{44}$$

- $z^2 \gg R^2$:
  Die Gleichung für $\vec{E}(z)$ lässt sich umschreiben als

  $$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \right) \vec{e}_z \tag{45}$$

  also gilt

  $$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 \tag{46}$$

damit ergibt sich

$$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right)\right)\vec{e}_z \tag{47}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\vec{e}_z \tag{48}$$

d) Das Elektrischer Feld einer Punktladung $Q$ im Ursprung lautet

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \tag{49}$$

was natürlich der Näherung $z^2 \gg R^2$ aus (c) entspricht.

## Aufgabe 5: Plattenkondensatoren

Eine Parallelschaltung zweier baugleicher $2,0\mu F$ Plattenkondensatoren wird an eine 100V-Batterie angeschlossen. Anschließend wird die Verbindung zur Batterie getrennt und der Abstand zwischen den Platten eines der Kondensatoren verdoppelt. Ermitteln Sie die Ladung auf der positiv geladenen Platte jedes Kondensators.

## Lösung

Bei einer Parallelschaltung von Kondensatoren lässt sich die Ersatzkapazität berechnen mit

$$C = C_1 + C_2 = 4,0\mu F \tag{50}$$

Damit lässt sich die Gesamtladung berechnen mit

$$Q = CU = 400\mu C \tag{51}$$

Diese Ladung verteilt sich nach dem Trennen der Batterie auf beide Kondensatoren. Durch die Verdoppelung des Plattenabstandes eines Kondensators halbiert sich dessen Kapazität. Weil die Kondensatoren immernoch parallel geschalten sind, liegt an beiden jedoch die gleiche Spannung an, also:

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad U_1 = U_2 \qquad C_1 = \frac{C_2}{2} \tag{52}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{2C_1} \tag{53}$$

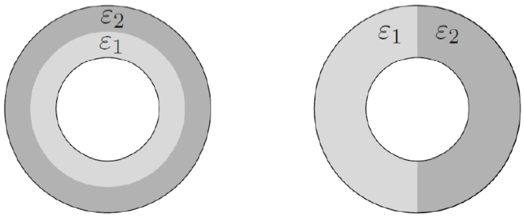
$$\Rightarrow 2Q_1 = Q_2 \tag{54}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{Q}{3} = 133\mu C \qquad Q_2 = \frac{2Q}{3} = 267\mu C \tag{55}$$

## Aufgabe 6: Kugelkondensatoren

An den beiden abgebildeten Kugelkondensatoren liegt zwischen der inneren und der äußeren Metallkugel die Spannung $U$ an. Dabei stellen die schattierten Bereiche Dielektrika dar. Berechnen Sie für (a) und (b) die Kapazität und die Flächenladungsdichte auf der äußeren und der inneren Kugel. Nehmen Sie an, dass die Felder in beiden Fallen rein radial ausgerichtet sind.
**Hinweis:** Die Kapazitat eines Kugelkondensators mit innerem bzw. äußerem Radius $R_i$ bzw. $R_a$ und Dielektrikum $\epsilon$ im Zwischenraum ist gegeben mit

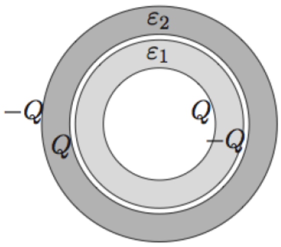
$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \tag{56}$$




(a) (b)

## Lösung

a) Wir denken uns nun den gegebenen Kondensator als Grenzfall von zwei ineinandergesteckten Kugelkondensatoren mit kleinem Luftspalt. Auf beiden Kondensatoren befinde sich die Ladung Q. Genauer: Auf der inneren Schale des inneren Kondensators Q, auf seiner äußeren -Q. Ebenso für den äußeren Kondensator. Dann herrscht im luftgefüllten Gebiet kein Feld. Es handelt sich dann um eine Reihenschaltung von Kondensatoren. Für den Inneren Kon-




densator gilt

$$C_1 = 4\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_{a1}R_{i1}}{R_{a1} - R_{i1}} \tag{57}$$

und entsprechend für den äußeren Kondensator. Die Gesamtkapazität lässt sich dann berechnen mit

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_{a1} - R_{i1}}{\epsilon_1 R_{a1}R_{i1}} + \frac{R_{a2} - R_{i2}}{\epsilon_2 R_{a2}R_{i2}}\right) \tag{58}$$

Nun lassen wir den Spalt gegen null gehen und erhalten $R_{a1} = R_{i2} =: R_m$, außerdem $R_i := R_{i1}$ und $R_a := R_{a2}$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_m - R_i}{\epsilon_1 R_m R_i} + \frac{R_a - R_m}{\epsilon_2 R_a R_m}\right) \tag{59}$$

$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_1\epsilon_2 R_i R_m R_a}{\epsilon_1 R_i(R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a(R_m - R_i)} \tag{60}$$

Für die Flächenladungsdichten gilt dann

$$\sigma_i = \frac{Q}{4\pi R_i^2} = \frac{CU}{4\pi R_i^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 R_m R_a U}{\epsilon_1 R_i^2(R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a R_i(R_m - R_i)} \tag{61}$$

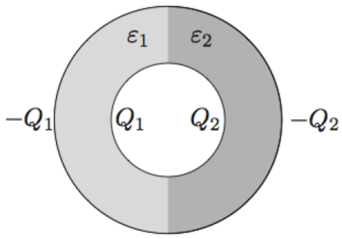
$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi R_a^2} = \frac{CU}{4\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 R_m R_i U}{\epsilon_1 R_i R_a(R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a^2(R_m - R_i)} \tag{62}$$

b) In diesem Fall befinden sich die beiden Hälften einer Kugelschale auf demselben Potential, tragen jedoch untschiedliche Ladungen. Es gilt:

$$Q_1 = C_1 U \qquad Q_2 = C_2 U \tag{63}$$

mit den halben Kapazitäten, also:

$$C_1 = 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \qquad C_2 = 2\pi\epsilon_2\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \tag{64}$$




Die Gesamtladung beträgt dann

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} U \tag{65}$$

und die Gesamtkapazität

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \qquad (= C_1 + C_2) \tag{66}$$

Es handelt sich also um eine Parallelschaltung von Kondensatoren. Für die Oberflächenladungsdichten gilt:

$$\sigma_{1i} = \frac{Q_1}{2\pi R_i^2} = \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{R_a/R_i}{R_a - R_i} U \tag{67}$$

$$\sigma_{1a} = \frac{Q_1}{2\pi R_a^2} = \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{R_i/R_a}{R_a - R_i} U \tag{68}$$

$$\sigma_{2i} = \frac{Q_2}{2\pi R_i^2} = \epsilon_0 \epsilon_2 \frac{R_a/R_i}{R_a - R_i} U \tag{69}$$

$$\sigma_{2a} = \frac{Q_2}{2\pi R_a^2} = \epsilon_0 \epsilon_2 \frac{R_i/R_a}{R_a - R_i} U \tag{70}$$