Probeklausur

1.1 Metrische Räume [7 Punkte]

Sei $f : X \to Y$ eine surjektive und stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. X sei kompakt. Man zeige, dass dann Y auch kompakt ist.

Lösung Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y. Dann existiert wegen f surjektiv eine Folge $\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Da X kompakt ist, hat diese eine konvergente Teilfolge $\left(f^{-1}\left(y_{n_k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $x_0 \in X$ konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert also die Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $y_0 := f(x_0) \in Y$ und damit ist Y kompakt.

1.2 Differenzierbarkeit [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Man zeige

(a) f ist partiell differenzierbar

(b) f ist nicht stetig

(c) f ist nicht total differenzierbar

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1,0)$?

Lösung

(a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen insbesondere auch partiell differenzierbar. Betrachte also den Fall $(x,y) = (0,0)$

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\partial_y f(0,0) = 0.$$

f ist also auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar und damit ist f partiell differenzierbar. [3 Punkte]

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir können also nur die Unstetigkeit am Nullpunkt zeigen. Wir benutzen dafür Polarkoordinaten $(x,y) = (r\sin\phi, r\cos\phi)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r,\phi) \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\phi\cos\phi}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \sin\phi\cos\phi\end{aligned}$$

Es gibt ϕ für die der Grenzwert $\neq 0 = f(0,0)$ ist $\Rightarrow$ f ist nicht stetig in $(0,0)$. [3 Punkte]

(c) Da f in $(0,0)$ nicht stetig ist, ist f dort auch nicht differenzierbar also f nicht differenzierbar. [1 Punkt]

(d) Außerhalb von $(0,0)$ ist f differenzierbar. Wir berechnen zunächst den Gradienten für $(x,y) \neq 0$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Richtungsableitung einfach berechnen.

$$\begin{aligned}\partial_v f(1,0) &= \nabla f(1,0) \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_2.\end{aligned}$$

[3 Punkte]

1.3 Taylorentwicklung [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar und der Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x_0,y_0,z_0) = 3$. Weiter sei

$$\partial_x^2 f(x_0,y_0,z_0) = -1, \partial_y^2 f(x_0,y_0,z_0) = -2, \partial_z^2 f(x_0,y_0,z_0) = -1$$

alle anderen Ableitungen verschwinden.

(a) Klassifizieren Sie den Punkt (x_0, y_0, z_0)

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f in (x_0, y_0, z_0) bis zur zweiten Ordnung?

(c) Sei nun $g(u, v, w) = f(1 + uv, 1 - u, 1 + vw)$. Wie lautet die Hessematrix von g im Ursprung?

Lösung

(a) Die Hesse-Matrix ist negativ definit also liegt bei $(1, 1, 1)$ ein isoliertes lokales Maximum vor. [2 Punkte]

(b) $f(1, 1, 1) = 3 + \frac{1}{2}\left(-(x-1)^2 - 2(y-1)^2 - 1(z-1)^2\right) + R_3$ [4 Punkte]

(c) Durch Einsetzen der Taylorentwicklung von f erhält man die Taylorentwicklung von g im Ursprung

$$\begin{aligned} g(u, v, w) &= f(1 + uv, 1 - u, 1 + vw) \\ &= 3 + \tfrac{1}{2}\left(-(uv)^2 - 2(-u)^2 - (vw)^2\right) + R_2 \\ &= 3 + \tfrac{1}{2}(-2u^2) + R_2 \end{aligned}$$

da die anderen Terme höherer Ordnung sind. Die Hessematrix lässt sich dann mit den Termen 2. Ordnung einfach ablesen

$$H_g(u, v, w) = \begin{pmatrix} -20 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[4 Punkte]

1.4 Implizite Funktionen [12 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^5 + z + xy = 1$ für festes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung besitzt. *Hinweis*: Monotonie

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die eindeutige Lösung der Gleichung $z^5 + z + xy = 1$ zuordnet, differenzierbar ist und berechnen Sie deren Ableitung im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie das (x, y) für das $g'(x, y)$ die Nullabbildung ist.

Lösung

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(z) = z^5 + z + xy - 1$ mit festem d.h. konstantem x, y. Für festes (x, y) ist $z \mapsto f(z)$ stetig und streng monoton steigend, da

$$\partial_z f(z) = 5z^4 + 1 > 0 \quad \forall z.$$

Wegen

$$\lim_{z \to \pm\infty} f(z) = \pm\infty$$

und dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem (x, y) also genau ein z, sodass $z = g(x, y)$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$. [4 Punkte]

(b) Wir betrachten die Nullstelle der Funktion $f(x, y, z) = z^5 + z + xy - 1$ und bestimmen ob sich die Funktion dort nach z auflösen lässt. Betrachte dazu das zur Variablen z gehörige partielle Differential

$$D_z f(x, y, z) = \partial_z f(x, y, z) = 5z^4 + 1 > 0 \quad \forall z$$

Damit ist $D_z f(x, y, z)$ invertierbar und es lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung für festes (x, y) eindeutig auflösen. Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt direkt, dass g differenzierbar ist und wir können die Ableitung berechnen

$$\begin{aligned} g'(x_0, y_0) &= -\left[\mathrm{D}_z f(x_0, y_0, g(x_0, y_0))\right]^{-1} \mathrm{D}_{xy} f(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \\ &= -\frac{1}{5g(x_0, y_0)^4 + 1} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[7 Punkte]

(c) Offensichtlich ist dies für $(0, 0)$ erfüllt. [1 Punkte]

1.5 Extrema mit Nebenbedingungen [14 Punkte]

Man bestimme die Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = 2xz - y^2$$

auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hesse-Matrix von f?

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K.

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$?

Lösung

(a)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2z \\ -2y \\ 2x \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 Punkte]

(b) Aus $\nabla f(x,y,z) = 0$ folgt $x = 0, y = 0, z = 0$. f hat also im Inneren von K einen stationären Punkt. [2 Punkte]

(c) Der Rand von K wird beschrieben durch die Nullstellen von $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Wegen $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, ist g im Ursprung nicht regulär, auf ∂K dagegen schon. Wir können also den Satz über die Lagrange-Multiplikatoren anwenden. Extremwerte auf dem Rand erfüllen die Gleichungen

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \text{ und } g(x,y,z) = 0.$$

Damit haben wir vier Unbekannte und vier Gleichungen

$$2z = 2\lambda x \tag{1}$$
$$-2y = 2\lambda y \tag{2}$$
$$2x = 2\lambda z \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{4}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: Aus Gleichung 1 und 3 erhlt man $\lambda = 1$. Eingesetzt in die zweite Gleichung muss dann $y = 0$ sein. Wir setzen dies und $x = z$ in die Nebenbedingung ein. Man erhält die beiden Kandidaten

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In beiden Fällen nimmt f den Funktionswert 1 an.
2. Fall: Die zweite Gleichung wird durch $\lambda = -1$ erfüllt für alle $y \in \mathbb{R}$. Das heißt y ist frei wählbar. Aus Gleichung 1 und 3 erhält man die Bedingung $x + z = 0$. Kombiniert man das mit der Nebenbedingung erhält man als Kandidaten alle Punkte

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Die Funktion nimmt überall den Wert -1 an. Dazu ersetzt man y^2 durch die Nebenbedingung und setzt zudem $x = -z$ ein.
3. Fall: $\lambda \neq \pm 1$. Es gibt keine Punkte, die die Bedingungen erfüllen. [7 Punkte]

(d) Da K kompakt ist, muss die Funktion f darauf ein globales Maximum und Minimum annehmen. Die Kandidaten sind oben aufgelistet, hinzu kommt noch der stationäre Punkt $(0,0,0)$ im Inneren von K mit Funktionswert 0. Damit sieht man, dass es sich bei p und q um die (globalen und lokalen) Maxima handeln muss und bei den Punkten auf der Kreislinie S um die (globalen und lokalen) Minima. [3 Punkte]

1.6 Variationsrechnung [10 Punkte]

Gegeben sei ein Funktional $F = \int_0^2 (x(t)^4 - \dot{x}(t)^2)dt$ mit den Randbedingungen $x(0) = 1, x(2) = 1$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion zu diesem Problem?

(b) Geben Sie ein erstes Integral $E(x, v)$ an.

(c) Wie lautet explizit die Euler-Lagrangegleichung für F?

Lösung

(a) Wegen $F(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ lässt sich die Lagrangefunktion leicht ablesen $L(x, v) = x^4 - v^2$.

(b) Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von t ab, somit ist Zeittranslation eine Symmetrie und die Energie eine Erhaltungsgröße. $E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v} - L(x, v) = -x^4 - v^2$.

(c) Wir berechnen die Euler-Lagrangegleichung für x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\partial_v L(x, v) - \partial_x L(x, v) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(-2v) - 4x^3 &= 0 \\ -2\ddot{x} - 4x^3 = 0 &\Leftrightarrow \\ \ddot{x} &= -2x^3 \end{aligned}$$

1.7 Parametrisierung auf Bogenlänge [4 Punkte]

Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)(-t, -\cosh t)$.

Lösung

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2 t'}dt' = \int_0^t \cosh t' dt' = \sinh t.$$

[2Punkte]
Mit der Umkehrfunktion $\tilde{t}(s) = \operatorname{arsinh}(s) = \sinh^{-1}(s)$ [1Punkt] ist

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tilde{t}(s)) = (-\operatorname{arsinh}(s), -\cosh(\operatorname{arsinh}(s))) &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1+\sinh(\operatorname{arsinh}(s))^2}) \\ &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1+s^2}).\end{aligned}$$

[1 Punkt]

1.8 Trennbare Differentialgleichung [8 Punkte]

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$

(a) Für welche Anfangswerte zur Zeit t=0 gibt es auf ganz $\mathbb{R}$ konstante Lösungen?

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
Hinweis: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert x(0)=-1 eindeutig bestimmt?

Lösung

(a) Ist eine Lösung $x(t) = c$ konstant, so folgt $\dot{x}(t) = 0$, also $\sqrt{1-x(t)^2} = 0$, somit $x(t) = x(0) = \pm 1$. Dies sind offenbar auch Lösungen. [2 Punkte]

(b) Trennung der Variablen führt auf das Integral

$$G(x) := \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = t - t_0$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $G(x) = \arcsin(x)$, definiert für $x \in]-1, 1[$

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $G(0) = 0 = 0 - t_0$, also $t_0 = 0$. Auflösen von $G(x) = t$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nach x liefert das Ergebnis $x(t) = \sin t$. Dieses kann nach links durch $x(t) = -1$ für $t \leq -\frac{\pi}{2}$ und nach rechts durch $x(t) = 1$ für $t \geq \frac{\pi}{2}$ stetig differenzierbar fortgesetzt werden. [4 Punkte]

(c) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Neben $x(t) = -1$ ist z.B. auch $x(t-5)$ mit dem $x(t)$ aus (b) eine Lösung des AWP.
Das liegt daran, dass $\sqrt{1-x^2}$ bei $x = \pm 1$ nicht Lipschitzstetig ist. [2 Punkte]