Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Implizite Funktionen und Differentialgleichungen

4.1 Umkehrbarkeit $\star$

Man betrachte die durch $g(s,t) = (e^s \cos(t), e^s \sin(t))$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass g die Bedingungen des Satzes über Umkehrfunktionen erfüllt, aber nicht injektiv ist

4.2 Implizite Funktionen $\star$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x,y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x,y) = h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

4.3 Umkehrbarkeit II

Zeige: die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

4.4 Umkehrbarkeit III

Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ ist.

4.5 Separierbare Differentialgleichungen $\star$

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} y$

(c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

4.6 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung?

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen der Gleichung?

(i) $-\ln x$

(ii) 0

(iii) 1

(iv) $2e^{-x}$

(v) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung an!

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an!

4.7 Separierbare Differentialgleichungen ⋆

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1 - y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

4.8 Lineares Differentialgleichungssystem ⋆

Lösen sie das AWP $\dot{x} = Ax$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Schreiben Sie das System als eine Differentialgleichung höherer Ordnung für x_1.

4.9 RC-Glied

Ein periodisch angeregtes RC-Glied (R=Widerstand, C=Kondensator) lässt sich in dimensionsloser Form folgenderweise darstellen.

$$\dot{x} + x = Asin(\omega t), \qquad \omega > 0$$

Lösen Sie die DGL als Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und partikulärer Lösung der inhomogenen DGL.

4.10 Lösung des Fundamentalsystems

Betrachten Sie die folgende homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Betrachten Sie die Reihendarstellung von e^{At} und zeigen Sie, dass gilt:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} cosh(t) & sinh(t) \\ sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad e^{A0} = 1$$

Hinweis: Berechnen Sie die Potenzen A und finden Sie dabei Regelmäßigkeiten.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und lösen Sie damit die Differentialgleichung.

4.11 Charakteristisches Polynom

Lösen Sie die DGL $3y'' + 2y' - y = 0$ mit den Randbedingungen y(1)=2 und y'(1)=0 mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

4.12 Gradienten Systeme

a) Seit dx/dt=f(x,y) und dy/dt=g(x,y). Zeigen Sie, dass, falls es sich um ein Gradientensystem handelt, gilt: df/dy=dg/dx

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Systemen um Gradientensysteme handelt? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion U(x,y).

   i) $\dot{x} = y^2 + ycos(x), \qquad \dot{y} = 2xy + sin(x)$

   ii) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - e^{2y}, \qquad \dot{y} = -2xe^{2y}$