Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Variationsrechnung und Kurven

3.1 Energieerhaltung bei der Variationsrechnung $\star$

Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{C}^2$, die Lagrange-Funktion $L(x, v, t)$, $x, v \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_1]$, zum zu minimierenden Funktional $\mathcal{F}(x(.)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$. Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von $\mathcal{F}$ mit den Endpunkten $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von $\mathcal{F}$ (d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t)v - L(x, v, t)$$

erhalten ist: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so ist $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ eine konstante Funktion. Was passiert, wenn $L(x, v, t)$ nur von t und x, bzw. nur von t und v abhängt?

(b) Wie lautet die Energiefunktion $E(x, v)$ für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik $L(x, v, t) = \frac{1}{2}m||v||^2 - V(x), x, v \in \mathbb{R}$?

Lösung

(a) Falls die Lagrange-Funktion $L(x, v, t)$ nicht explizit von t abhängt, $L(x, v, t) = \tilde{L}(x, v)$ so lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\partial_v \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t)) - \partial_x \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{1}$$

Für jede Lösung $x(t)$ hiervon ist

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \tilde{x}(t))\right)\dot{x}(t) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t)$$

$$-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) - \frac{\tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\right)\dot{x}(t) = 0,$$

also ist die Energiefunktion entlang Lösungen von 1 konstant.
Falls $L(x, v, t)$ nur von t und x abhängt, wird 1 zu $\partial_x L(x(t), t) = 0$.
Falls $L(x, v, t)$ nur von t und v abhängt, wird 1 zu $\partial_v L(\dot{x}(t), t) = \text{const}$.

(b) $E(x, v) = mv^T v - L(x, v, t) = \frac{1}{2}m||v||^2 + V(x)$

3.2 Brachistochrone (Kurve küzester Laufzeit)

Ein Massepunkt bewege sich entlang einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ mit Geschwindigkeit $v(\gamma(\theta)) > 0$. Dann ist die Zeit zum Durchlaufen der Kurve gegeben durch

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\|\gamma'(\theta)\|}{v(\gamma(\theta))} d\theta$$

Im Schwerefeld der Erde ist für ein anfangs ruhendes Teilchen mit $\gamma(0) = (0, 0)$ die Geschwindigkeit gegeben durch $v(\gamma(\theta)) = \sqrt{(-g\gamma_2(\theta))}$ mit der Erdbeschleunigung g, wobei $\gamma_2(\theta) \le 0$ vorausgesetzt wird. Der Endpunkt sei $\gamma(a) = (b, c)$ mit $b > 0, c < 0$.

(a) Sei γ durch seine negative y-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (f(\theta), -\theta)$ wobei $a = -c$ gesetzt ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Kurven γ, die extremal bezüglich $T(\gamma)$ sind.

(b) Sei γ nun durch seine x-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (\theta, g(\theta))$, wobei jetzt $a = b$ gewählt ist. Welche Differentialgleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung?

Lösung

(a) In dieser Parametrisierung ist

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + f'(\Theta)^2}}{\sqrt{g\Theta}} d\Theta = \int_0^a L(f(\Theta), f'(\Theta), \Theta) d\Theta \tag{2}$$

mit der Lagrangedichte $L(x, v, \Theta) = \sqrt{\frac{1+v^2}{g\Theta}}$. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

wird hier gelöst durch die Funktionen $f(\Theta)$ mit $\frac{\partial L}{\partial v}(f(\Theta), f'(\Theta), \Theta) = const.$
Wegen $\frac{\partial L}{\partial v}(f(x, v, \Theta)) = \frac{v}{\sqrt{g\Theta(1+v^2)}}$ muss es ein $C \in \mathbb{R}$ geben mit

$$C\sqrt{g\Theta(1 + f'(\Theta)^2) = f'(\Theta)}, \tag{3}$$

wobei die Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f(a) = b$ zu erfüllen sind.

(b) In der hier angegebenen Parametrisierung ist

$$T(\gamma) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + g'(\Theta)^2}}{\sqrt{gg\Theta}} d\Theta = \int_0^b L(g(\Theta), g'(\Theta)) d\Theta \tag{4}$$

mit der Θ-unabhängigen Lagrange-Dichte $L(y, v) = \frac{1+v^2}{-gy}$. Eine so parametrisierte extremale Kurve erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung und da L unabhängig von Θ ist, auch die Energieerhaltung

$$E(g(\Theta), g'(\Theta)) = \text{const.}$$

mit $E(y, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(y, v)v - L(y, v) = \frac{v^2}{\sqrt{-gy(1+v^2)}} - \sqrt{\frac{1+v^2}{-gy}} = \frac{-1}{\sqrt{-gy(1+v^2)}}$. Das ergibt die Differentialgleichung

$$g(\Theta)(1 + g'(\Theta)^2) = C'$$

mit einer Konstanten $C' \le 0$ und den Randbedingungen $g(0) = 0; g(b) = c$.

3.3 Neilsche Parabel ⋆

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

Lösung Eine mögliche Parametrisierung erhält man durch Auflösen nach x:

$$\gamma_1(y) = \begin{pmatrix} |y|^{\frac{2}{3}} \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings nicht differenzierbar bei $y = 0$.
Eine glatte Parametrisierung erhält man duch

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings singulär bei $t = 0$ ($\gamma_2'(0) = 0$). Davon ausgehend berechnen wir die Bogenlänge, zunächst für $T \geq 0$:

$$s(T) = \int_0^T ||\dot{\gamma}_2(t)||dt = \int_0^T \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt = \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^T = \frac{1}{27}(4 + 9T^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}.$$

Für die Umkehrfunktion gilt $T(s)^2 = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4] = (s + \frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$. Aus Symmetriegründen ist dann die Parametrisierung nach Bogenlänge für $s \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} T(|s|)^2 \\ \operatorname{sgn}(s)T(|s|)^3 \end{pmatrix}$$

3.4 Wegintegrale ⋆

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}x$.

(i) $f(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii) $f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

(iii) $f(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$

(iv) $f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$, $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$

Lösung

(i)

$$\int_\gamma f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)}, \cos(t)\sin(t)) \cdot \big(-\sin(t)\cos(t)\big)\, dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)e^{\cos(t)} + \cos^2(t)\sin(t)dt$$

mit $\cos(t) = x \Rightarrow$

$$\int_{\cos(0)}^{\cos(2\pi)} e^x - x^2 dx = 0$$

(ii)

$$\int_\gamma f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 (\sin(t), t^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_1^2 (\sin(1), 1+(t-1)^2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$-\cos(1) + 1 + \int_1^2 t^2 - 2t + 2dt = -\cos(1) + \frac{7}{3}$$

(iii)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{\ln(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot \begin{pmatrix}\cosh(t)\\ \sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{\ln(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \cosh(t)\sinh(t)dt = \int_0^{\ln(2)} 1 + \cosh(t)\sinh(t)dt$$

mit $\sinh(t) = x \Rightarrow$

$$\ln(2) + \int_0^{\frac{3}{4}} xdx = \ln(2) + \frac{9}{32}$$

(iv)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (2t-t, t, t^2) \cdot \begin{pmatrix}\cos(t) - t\sin(t)\\ \sin(t) + t\cos(t)\\ 1\end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2\cos(t)dt - \int_0^{2\pi} t^2\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2dt$$

mit partieller Integration $\Rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi^3 + 4\pi^2 + 2\pi$$

3.5 Länge von Kurven ⋆

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

(i) $\gamma_1(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ fest.

(ii) $\gamma_2(t) = (t^2, t^3)$ mit $0 \leq t \leq 4$.

Lösung

(i) $\gamma_1(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_1'(t) = (3a\cos^2 t(-\sin t), 3a\sin^2 t\cos t) \Rightarrow$

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} ||\gamma_1'(t)||_2 dt = \int_0^{2\pi} (9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |3a\cos t\sin t|(\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt = 3a\int_0^{2\pi} |\cos t\sin t|dt$$

mit Additionstheorem $\Rightarrow$

$$3a\int_0^{2\pi} |\frac{1}{2}\sin 2t|dt = 3a\frac{1}{2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt = 6a$$

(ii) $\gamma_2(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_2'(t) = (2t, 3t^2) \Rightarrow$

$$L(\gamma_2) = \int_0^4 ||\gamma_2'(t)||_2 dt = \int_0^4 (4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^4 t(4 + 9t^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

mit $\varphi(t) = 4 + 9t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{18} \int_0^4 (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} \varphi'(t) dt = \frac{1}{18} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(4)} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{54} \Bigg|_4^{148} = \frac{1}{27}(148^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

3.6 Flächeninhalt der Kardioide ⋆

Sei $a > 0$ und $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_0^+$ die Parametrisierung der Kardioide in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos\ \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioide.

Lösung Der von einer Kurve in Polarkoordinaten $r(\phi)$ eingeschlossene Flächeninhalt lautet:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\phi\, r'(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos\phi))^2 d\phi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi = \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi + \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(2\pi + 2[\sin\phi]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right]_0^{2\phi} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

3.7 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.
Hinweis: Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

Lösung Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis.

$$\dot{x}(t) = \cos\frac{t^2}{2},\ \ddot{x}(t) = -t\sin\frac{t^2}{2}$$

$$\dot{y}(t) = \sin\frac{t^2}{2},\ \ddot{y}(t) = t\cos\frac{t^2}{2}$$

Einsetzen ergibt: $\kappa(t) = t$
Die Länge berechnet sich aus

$$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)|du = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}du = t.$$

Wer noch mehr üben möchte:

3.8 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang U des Kreises um (0,0) mit Radius r¿0. Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral $4\int_k 1ds$, bei dem k der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

Lösung

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le r \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \end{pmatrix}$

$L = \int\limits_0^r ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}dx \int\limits_0^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = r\int\limits_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}} = r \cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r \cdot \frac{\pi}{2}$

$U = 4L = 2\pi r$

3.9 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}ds$$

über die Ellipse k

$$x^2a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

Lösung:

$\gamma = \begin{pmatrix} a(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$

$\int\limits_0^{2\pi} f(x(t), y(t))||\dot{\gamma}||dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$

$a^2\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 tdt + b^2\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 tdt = \pi(a^2 + b^2)$

3.10 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, f(x)$ und $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a)$ mit $a > 0$ beschrieben (Einheit 1km).

a) Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.

c) Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

Lösung

a) $L(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_{-1}^{1} ||(1, \sinh(ax))||dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+\sinh^2(ax)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \cosh a(x)dx = \frac{2}{a}\sinh(a)$

b) $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\ \cosh(ax)}{(1+\sinh^2(ax))^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\cosh^2(ax)} \qquad \kappa(0) = a$ und $\kappa(\pm 1) = \frac{a}{\cosh^2 a}$

c) $\Delta l = \frac{2}{a}\sinh(a) - 2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^4}{60} + ... \qquad d = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + ...\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{3\Delta l} \approx 0.866\sqrt{\Delta l}$

   i) $\Delta l = 1mm = 10^{-6}km \qquad \Rightarrow d \approx 0.866m$

   ii) $\Delta l = 10cm = 10^{-4}km \qquad \Rightarrow d \approx 8.66m$

   iii) $\Delta l = 1m = 10^{-3}km \qquad \Rightarrow d \approx 27.386m$

3.11 Schraubenlinie

Die Kurve $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ mit $c, r > 0$ heißt Schaubenlinie.

a) Parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie $R^2 = c^2 + r^2$)

b) Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektro und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

Lösung:

a) $\gamma'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t), c) \qquad ||\gamma'(t)||_2^2 = r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + c^2 = r^2 + c^2 = R^2$
$l(\tau) := \int\limits_0^{\tau} ||\gamma_c'(t)||_2 dt = \int\limits_0^{\tau} Rdt = R\tau$
Die gesuchte Parametertransformation ist als gegeben durch $t = \varphi(s) = l^{-1}(s) = \frac{s}{R}$
Die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist also $\tilde{\gamma}(s) = (r\cos(\frac{s}{R}), r\sin(\frac{s}{R}), \frac{cs}{R})$

b) $\tau(s) = \tilde{\gamma}'(s) = (-\frac{r}{R}\sin(\frac{s}{R}), \frac{r}{R}\cos(\frac{s}{R}), \frac{c}{R}) \qquad \tau'(s) = (-\frac{r}{R^2}\cos(\frac{s}{R}), -\frac{r}{R^2}\sin(\frac{s}{R}), 0)$
$\kappa(s) = ||\tau'(s)||_2 = \sqrt{\frac{r^2}{R^4}[(\cos^2(\frac{s}{r}) + \sin^2(\frac{s}{r}]} = \frac{r}{R^2}$
$n(s) = \frac{\tau'(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(\frac{s}{R}, -\sin(\frac{s}{R}), 0)$

3.12 Kurvenlänge

a) $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma|_{[-\pi,\pi]}$.

b) Finden Sie die singulären Punkte der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos^3(t)\sin(t), \sin^3(t))$ und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

Lösung:

a) $||\gamma'(t)|| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(2\cdot\frac{t}{2})} =$
$\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2})} = 2|\sin(\frac{t}{2}|$
$L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} ||\gamma'(t)||dt = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin(\frac{t}{2})|dt = 4\int\limits_0^{\pi} \sin(\frac{t}{2})dt = 4(-2\cos(\frac{t}{2})|_{t=0}^{t=\pi} = 8$

b) γ ist stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$. Also ist $\gamma'(t) = 0$ an jeder Stelle, für die $\cos(t) = 0$ oder $\sin(t) = 0$. Die Menge der singulären Punkte von γ ist demnach $\{0, \frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$.
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} = 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))} = 3|\cos(t)\sin(t)| = \frac{3}{2}\sin(2t)|$
$L(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)dt + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(2t)dt\right) =$
$= \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds\right) =$
$= -\frac{3}{4}((-1-1) - (1+1) + (-1-1) - (1+1)) = 6$

3.13 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve $\gamma_c(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t)),\ c > 0$.

a) Berechnen Sie die Länge L von γ_c auf $[0, 4\pi]$

b) Parametrisieren Sie $\gamma_c|_{[0,4\pi]}$ nach der Bogenlänge

Lösung:

a)

$$\gamma_c'(t) = e^{ct}(c\ cos(t) - sin(t), c\ sin(t) + cos(t))$$
$$||\gamma_c'(t)||_2^2 = e^{2ct}[c^2cos^2(t) - 2c\ cos(t)sin(t) + sin^2(t) + c^2sin^2(t) - 2csin(t)cos(t) + cos^2(t)] = e^{2ct}[c^2+1]$$
$$L(\gamma_c) = \int\limits_0^{4\pi} e^{ct}\sqrt{1+c^2}dt = \sqrt{1+c^2}\frac{e^{4\pi} - e^0}{c} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{4\pi c} - 1)$$

b) $l(\tau) :== \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{\tau c} - 1) = s \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{1}{c}ln\left(1 + \frac{sc}{1+c^2}\right) = t$